2006–12–06

Andra ordningens system

Utgå ifrån en överföringsfunktion med två poler och utan nollställen.

$$H(s) = \frac{K}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{K}{s^2 - s(p_1+p_2) + p_1\,p_2}$$

Partialbråksuppdela:

$$\frac{K}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{A}{s-p_1} + \frac{B}{s-p_2}$$

$$K = A(s-p_2) + B(s-p_1)$$

$$s^0\colon \quad K = -\,A\,p_2 - B\,p_1$$

$$s^1: \quad 0 = A + B$$

$$A = \frac{K}{p_1 - p_2} = -\,B$$

Invers Laplacetransform:

$$\frac{1}{s+a} \quad \rightleftarrows \quad \mathrm{e}^{-at}\,\theta(t)$$

⟨fig1⟩.

Låt insignalen vara en impuls:

$$x(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$$

Utsignalen då insignalen är en impuls kallas systemets impulssvar. $y(t) = h(t)$.

Samband mellan insignal, utsignal och system i frekvensdomänen:

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

Men nu är $X(s) = 1 \Rightarrow Y(s) = H(s)$.

$$h(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad H(s)$$

$h(t) = A\,\mathrm{e}^{p_1 t} - A\,\mathrm{e}^{p_2 t}$, $t \geqslant 0$.

Om polerna p_1 och p_2 är reella så måste $p_1 < 0$ och $p_2 < 0$ för att systemet ska vara stabilt. För komplexa poler

$$p_1 = a + \mathrm{i}b$$

$$p_2 = a - \mathrm{i}b = p_1^*$$

Notera $p_1 = p_2^*$, för vi kräver att koefficienterna i täljar- och nämnarpolynomen till $H(s)$.

$$h(t) = A\,\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)t} - A\,\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}b)t}, t \geqslant 0$$

$$h(t) = A\,\mathrm{e}^{at}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}bt}\right) = A\,\mathrm{e}^{at} \cdot 2\mathrm{i} \cdot \sin(b\,t), \quad t \geqslant 0$$

$a = \operatorname{Re} p_1 = \operatorname{Re} p_2$ måste vara < 0, annars instabilt.

$b = \operatorname{Im} p_1$ ger svägningsfrekvensen i impulssvaret.

Med $p_1 = \sigma + \mathrm{i}\omega, p_2 = \sigma - \mathrm{i}\omega, K = 1$:

$$A = \frac{K}{p_1 - p_2} = \frac{1}{\mathrm{i}\,2\omega}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}\omega} \cdot \mathrm{e}^{\sigma t} \cdot 2\mathrm{i} \sin \omega t = \frac{1}{\omega} \mathrm{e}^{\sigma t} \sin \omega t, \quad t \geqslant 0$$

För stabilt system, $\sigma < 0$, vilket betyder att polerna p_1 och p_2 ska ligga i det vänstra halvplanet. Svägningsfrekvensen $\omega = |\operatorname{Im} p_1|$. ⟨fig2⟩.

Frekvenssvar $H(\mathrm{i}\omega)$

Motsvarar fallet med stationära sinusformade signaler då vi använder oss av jω-metoden.

$$H(s)|_{s=\mathrm{i}\omega} = H(\mathrm{i}\omega) = \frac{K}{(\mathrm{i}\omega - p_1)(\mathrm{i}\omega - p_2)}$$

$H(\mathrm{i}\omega)$ studeras vanligen som amplitudkarakteristik $|H(\mathrm{i}\omega)|$, vilket ger systemets amplitudförändring för en sinusformad signal med vinkelfrekvensen ω.

Faskarakteristik arg $H(\mathrm{i}\omega)$, vilket ger systemets fasförändring för en sinusformad signal med frekvensen ω. Med logaritmiska axlar $\to$ Bodediagrammet.

$$H(\mathrm{i}\omega) = \frac{K}{(\mathrm{i}\omega - p_1)(\mathrm{i}\omega - p_2)}$$

Grafisk tolkning av frekvenssvaret. ⟨fig3⟩.

Belopp

$$|H(\mathrm{i}\omega)| = \frac{|K|}{|\mathrm{i}\omega - p_1| \cdot |\mathrm{i}\omega - p_2|}$$

Genom att studera hur längden på vektorerna $\mathrm{i}\omega - p_1$ och $\mathrm{i}\omega - p_2$ varierar med vinkelfrekvensen ω kan man få en uppfattning om hur $|H(\mathrm{i}\omega)|$ varierar med ω.

Faskarakteristik

$$\arg H(\mathrm{i}\omega) = \arg K - \underbrace{\arg(\mathrm{i}\omega - p_1)}_{\phi_1} - \underbrace{\arg(\mathrm{i}\omega - p_2)}_{\phi_2}$$

Samma resonemang kan användas för en generell överföringsfunktion $G(s)$:

$$G(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

(kvot mellan plynom i s).

Beräkna poler och nollställen och faktorisera:

$$G(s) = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{M} (s - z_k)}{\prod_{k=1}^{N} (s - p_k)}$$

med frekvenssvaret:

$$G(s)|_{s=\mathrm{i}\omega} = G(\mathrm{i}\omega)$$

Beloppskarakteristik

$$|G(\mathrm{i}\omega)| = \left|\frac{b_M}{a_N}\right| \cdot \frac{\prod_{k=1}^{M} |\mathrm{i}\omega - z_k|}{\prod_{k=1}^{N} |\mathrm{i}\omega - p_k|} = \left|\frac{b_M}{a_N}\right| \cdot \frac{\text{produkt mellan längder på nollställevektorer}}{\text{produkt mellan längder på polvektorer}}$$

Faskarakteristik:

Summera alla fasbidrag från nollställevektorerna och subtrahera alla fasbidragen från polvektorerna.

Tillbaka till tidsegenskaper.

Stegsvar ⟨fig4⟩.

Låt insignalen $x(t)$ vara ett enhetssteg, $x(t) = \theta(t)$

$$\theta(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s) = \frac{1}{s} H(s)$$

Inverstransform ger stegsvaret $y(t)$:

Alternativt: stegsvaret

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Andra ordningens LP-system (lågpassystem, konstant i täljaren) skrivs ofta på formen

$$H(s) = \frac{H_0\,\omega_0^2}{s^2 + s\,2k\omega_0 + \omega_0^2}$$

Poler:

$$s_{1,2} = -\,k\,\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{k^2 - 1}$$

k: dämpfaktor: $k < 1$: imaginära poler; $k > 1$: reella poler; $k = 1$: reell dubbelpol.

Om $k < 1$ (komplexa poler), kvadratkomplettera innan invers transformering.

$$s^2 + 2\,k\,\omega_0\,s + \omega_0^2 = (s + k\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - k^2)$$

$$H(s) = \frac{H_0\,\omega_0^2}{(s + k\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - k^2)}$$

Från tabell

$$\sin b\,t \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \frac{b}{s^2 + b^2}$$

$$\mathrm{e}^{-at} f(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad F(s + a), \quad \text{där } F = \mathcal{L}(f)$$

$$H(s) = \frac{H_0\omega_0^2}{\omega_0\sqrt{1 - k^2}} \cdot \frac{\omega_0\sqrt{1 - k^2}}{(s + k\,\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - k^2)}$$

Inverstransformering ger

$$h(t) = \frac{H_0\omega_0^2}{\omega_0\sqrt{1 - k^2}} \cdot \mathrm{e}^{-k\omega_0 t} \cdot \sin(\omega_0\sqrt{1 - k^2} \cdot t) \cdot \theta(t)$$