2006–12–04

⟨fig1⟩

Ideala operationsförstärkare, negativt återkopplade: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, i_{\mathrm{op}} = 0$. Beräkna u_0/u_s!

- Inför spänningen u.
- Strömsummering nod A.
- Spänningsdelning från u_0 ger u_2.
- Spänningsdelning mellan u och u_0 över R och C.
- Lös u_0/u_s.

Återkoppling

Generellt blockschema för en återkopplad förstärkare ⟨fig2⟩.

Antag att förstärkarna är unilaterala, signalöverföring sker endast i pilens riktning.

$$\left.\begin{array}{r} u_{\mathrm{ut}} = u_i \cdot F \\ u_i = u_{\mathrm{in}} - u_f \\ u_f = u_{\mathrm{ut}} \cdot \beta \end{array}\right\} \Rightarrow u_{\mathrm{ut}} = F(u_{\mathrm{in}} - u_{\mathrm{ut}} \cdot \beta)$$

$$u_{\mathrm{ut}}(1 + \beta F) = F u_{\mathrm{in}}$$

$$\frac{u_{\mathrm{ut}}}{u_{\mathrm{in}}} = \frac{F}{1 + \beta F} = F_f$$

$$F_f = \frac{F}{1 + \beta F}$$

F_f kallas slutna förstärkningen (*closed loop gain*).

F kallas öppna förstärkninge (*open loop gain*).

β kallas återkopplingsfaktorn (*feedback factor*).

$1 + \beta F$ kallas okänslighetsfaktorn (*desensitivity factor*).

Varför har vi negativ återkoppling? Nästan alla gynnsamma egenskaper förknippade med återkoppling erhålls vid negativ återkoppling.

1. Skräddarsy förstärkning och bandbredd.
2. Skräddarsy in- och utimpedans.
3. Förbättra noggrannheten i förstärkning.
4. Reducera brus och icke-linjär distortion.

Studera nr 1: skräddarsy **förstärkning** och bandbredd. ⟨fig3⟩.

Antag att operationsförstärkaren har $R_i = \infty, R_o = 0, F \neq \infty$ (ej ideal).

Kretsekvationer:

$$u_{\text{in}} = \varepsilon + u_f$$

$$u_{\text{ut}} = \varepsilon F$$

$$u_f = u_{\text{ut}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$u_{\text{in}} = \frac{u_{\text{ut}}}{F} + u_{\text{ut}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = u_{\text{ut}} \cdot \frac{R_1 + R_2 + F R_1}{F(R_1 + R_2)}$$

$$\frac{u_{\text{ut}}}{u_{\text{in}}} = \frac{F(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + F R_1} = \frac{F}{1 + F \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

Jämför med $F_f = \frac{F}{1 + \beta F}$. Om $\beta F \gg 1$ blir $u_{\text{ut}}/u_{\text{in}} \approx 1/\beta = 1 + R_2/R_1$.

Bandbredd Antag att vi har en förstärkare F som kan beskrivas med en överföringsfunktion som har en pol.

$$F = \frac{F_0}{1 + \frac{s}{\omega_1}}$$

ω_1 är övre brytvinkelfrekvensen.

Negativ återkoppling ger den slutna förstärkningen

$$F_f = \frac{F}{1 + \beta F} = \frac{\frac{F_0}{1 + \frac{s}{\omega_1}}}{1 + \beta \frac{F_0}{1 + \frac{s}{\omega_1}}} = \frac{F_0}{1 + \frac{s}{\omega_1} + \beta F_0}$$

vilket ger

$$F_f = \frac{F_0}{1 + \beta F_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_1(1 + \beta F_0)}}$$

Övre brytvinkelfrekvensen (bandbredden) har ökat till $\omega_f = \omega_1(1 + \beta F_0)$ och samtidigt har maximala förstärkningen sjunkit från F_0 till $\frac{F_0}{1 + \beta F_0}$. ⟨fig4⟩. Maximal förstärkning minskar med samma faktor som övre brytvinkelfrekvensen ökar.

Gain Bandwidth (GB) är konstant. GB $= F_0 \cdot \omega_1 = \frac{F_0}{1 + \beta F_0} \cdot \omega_1(1 + \beta F_0) = \omega_t$. ω_t är *unity gain bandwidth* i datablad.

Förbättring av noggrannhet i förstärkningen

En verklig operationsförstärkare uppvisar ofta stor spridning i öppna förstärkningen ("råförstärkning") vid serieproduktion.

$$F_f = \frac{F}{1 + \beta F} \to \frac{1}{\beta} \quad \text{då } F \to \infty$$

Noggrannheten i F_f blir bättre ju högre F är. Relation ⟨fig5⟩.

Studera detta mer detaljerat.

Derivera F_f med avseende på F.

$$\frac{\partial}{\partial F}\left(\frac{F}{1+\beta F}\right)=\frac{1+\beta F-\beta F}{(1+\beta F)^2}=\frac{1}{(1+\beta F)^2}=$$

$$=\frac{F}{1+\beta F}\cdot\frac{1}{F(1+\beta F)}=\frac{F_f}{F}\cdot\frac{1}{1+\beta F}$$

Linjärisera runt $F=F_{\text{nom}}$.

$$\frac{\Delta F_f}{F_f}=\frac{\Delta F}{F}\cdot\frac{1}{1+\beta F}$$

$$\text{Relativ spridning i } F_f=\text{Relativ spridning i } F\cdot\frac{1}{\text{okänslighetsfaktorn}}$$

Om $1+\beta F\gg 1$:

$$\frac{\Delta F}{F_f}\ll\frac{\Delta F}{F}$$

Exempel: Tillverkning av operationsförstärkare: $F_{\text{nom}}=1000$. Sprinding i förstärkningen förekommer i 95% av exemplaren. Ligger inom $\pm 20\%$ av F_{nom}. Hur stor blir motsvarande spridning i den återkopplade förstärkaren om okänslighetsfaktorn $D=1+\beta F$ väljs till 10.

Alltså:

$$1+\beta F=10$$

$$\beta=\frac{10-1}{F}=\frac{10-1}{1000}=0.009$$

Utan återkoppling

$$F_{\text{nom}}=1000\pm 20\%=\begin{cases}1200=F_{\max}\\ 800=F_{\min}\end{cases}$$

Med återkoppling:

$$D=1+\beta F=10,\quad F_{f,\text{nom}}=\frac{F_{\text{nom}}}{10}=100$$

$$F_{f,\max}=\frac{F_{\max}}{1+\beta F_{\max}}=\frac{1200}{1+0.009\cdot 1200}=101.69\Rightarrow +1.69\%$$

$$F_{f,\min}=\frac{800}{1+0.009\cdot 800}=9.756\Rightarrow -2.44\%$$

Negativ återkoppling av 1:a, 2:a och 3:e ordningens system

Samband mellan s-plan, frekvensplan och tidsplan som en funktion av ökad återkopplingsgrad. Utgå ifrån följande grundsystem: ⟨fig6⟩.

$$F_f=\frac{F}{1+\beta F}$$

□ Första ordningens system (en pol)

$$F(s) = \frac{F_0}{1 + \frac{s}{\omega_1}} = \text{öppna förstärkningen=“råförstärkning”}$$

$$F_f = \frac{\frac{F_0}{1 + \frac{s}{\omega_1}}}{1 + \beta \frac{F_0}{1 + \frac{s}{\omega_1}}} = \frac{F_0}{1 + \beta F_0 + \frac{s}{\omega_1}} = \frac{F_0}{1 + \beta F_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_1 (1 + \beta F_0)}} = \frac{F_{0f}}{1 + \frac{s}{\omega_f}}$$

* Polens placering i s-planet ⟨fig7⟩.
* Amplitudkarakteristik (Frekvensplan). ⟨fig8⟩.
* Stegsvar (Tidsplanet)

$$u_{\mathrm{ut}}(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{\substack{\text{insignal} \\ \text{ett steg}}} \cdot \frac{F_{0f}}{1 + \frac{s}{\omega_f}} \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} u_{\mathrm{ut}}(t) = F_{0f} \big(1 - \mathrm{e}^{-t \cdot \omega_f}\big) \theta(t) =$$

$$= F_{0f} \Big(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\Big) \theta(t)$$

⟨fig9⟩ β ökar $\rightarrow \omega_f$ ökar $\rightarrow \tau$ minskar, snabbare stegsvar.

□ Andra ordningens system (två poler):

Öppna förstärkningen, “råförstärkning”:

$$F = \frac{F_0}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)}$$

Insättes i $F_f = \frac{F}{1 + \beta F}$:

$$F_f = \frac{F_0}{1 + \beta F_0} \cdot \frac{\omega_1 \omega_2 (1 + \beta F_0)}{s^2 + s(\omega_1 + \omega_2) + \omega_1 \omega_2 (1 + \beta F_0)} = \frac{F_{0f} \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\, s\, k\, \omega_0 + \omega_0^2}$$

där $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\, \omega_2 (1 + \beta F_0)}$.

$$2\, k = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_0}$$

k: dämpfaktor. β ökar $\rightarrow k$ minskar.

* Polernas placering i s-planet.

$$s_{1,2} = -\, k\, \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{k^2 - 1} = -\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)^2 - \omega_1 \omega_2 (1 + \beta F_0)}$$

⟨fig10⟩. Notera att plerna stannar i det vänstra halvplanet vid ökad återkoppling (stabilt!).

* Amplitudkarakteristik ($s = \mathrm{i}\omega$).

⟨fig11⟩ $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ motsvarar en maximalt slät amplitudkarakteristik (jfr Butterworth-filter).

$$|F_f(\mathrm{i}\omega)| = \frac{F_0}{1 + \beta F_0} \cdot \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\, k\, \omega_0\, \omega)^2}}$$

$*$ Tidsplan (studera stegsvar)

$$U(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{\substack{\text{insignal} \\ \text{ett steg}}} \cdot F_f(s)$$

Invers Laplacetransform ⟨fig12⟩.

$k > 1$: Översvängningsfritt, reella poler (överdämpat).

$k = 1$: Aperiodiska gränsfallet, kritiskt dämpat. Dubbelpol. Ger så snabbt stegsvar som möjligt utan översväng.

$k < 1$: översväng i stegsvar, underdämpat. Komplexa poler.

□ Tredje ordningens system (tre poler)

$$F = \frac{F_0}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_3}\right)}$$

Insättes i $F_f = \frac{F}{1 + \beta F}$. Vi får

$$F_f = \frac{F_{0f}}{1 + a_1 \frac{s}{\omega_0} + a_2\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + a_3\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^3} = \frac{F_{0f}}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right)\left(1 + \frac{s}{p_2}\right)\left(1 + \frac{s}{p_3}\right)}$$

Studera poler i s-planet ⟨fig13⟩.

Återkopplas ett tredje ordningens system tillräckligt mycket blir det instabilt (=polier i hhp).

Stabilitet

Bounded

Input

Bounded

Output

Stabilt om en begränsad insignal ger upphov till en begränsad utsignal. Detta kan uttrycas på flera sätt.

- Impulssvaret $h(t)$ skall vara absolutintegrerbart.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, \mathrm{d}t < \infty$$

  Impulssvar $h(t) = u_{\mathrm{ut}}(t)$ då insignalen är en enhetsimpuls $u_{\mathrm{in}}(t) = \delta(t)$

- Då måste $h(t) \to 0$ då $t \to \infty$.

- Systemets (förstärkarens) överföringsfunktion får endast ha poler i vänstra halvplanet.

Slingförstärkning, T

⟨fig14⟩

$$F_f = \frac{F}{1 + \beta F} = \frac{F}{1 - T}$$

Där $T = -\beta F$ kallas slingförstärkning. Slingförstärkningen fås genom att nollställa insignalen, bryta upp återkopplingsslingan och beräkna överföringsfunktionen i återkopplingen. ⟨fig15⟩.

$$u_0 = u_i \cdot \beta(-1)F$$

$$\frac{u_0}{u_i} = -\beta F = T$$

Ett specialfall av återkoppling — oscillatorer:

Oscillatorer

För dimensionering av en oscillator gäller $T(\mathrm{i}\omega) = 1$. $|T| = 1, \arg T = 0$.

Vi exemplifierar med

Uppgift H6 ⟨fig16⟩.

Laplacetransformera nätet, rita om, bryt upp återkopplingsslingan, beräkna slingförstärkning T ⟨fig17⟩

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{s\,C_1}$$

$$Z_2 = R_2 \| \frac{1}{s\,C_2} = \frac{R_2}{1 + s\,R_2\,C_2}$$

$$u_0 = u'_{\mathrm{ut}} \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = u'_{\mathrm{ut}} \cdot \frac{s\,R_2\,C_1}{s\,R_2\,C_1 + (1 + s\,R_1\,C_1)(1 + s\,R_2\,C_2)}$$

$$u_{\mathrm{ut}} = u_0 \cdot F$$

Slingförstärkning $T = u_{\mathrm{ut}}/u'_{\mathrm{ut}}$.

$$T = \frac{F \cdot s\,R_{21}}{1 + s(R_2\,C_1 + R_1\,C_1 + R_2\,C_2) + s^2(R_1\,R_2\,C_1\,C_2)}$$

Självsvägning (oscillator) $T(\mathrm{i}\omega) = 1$.

$$T(\mathrm{i}\omega) = \frac{F \cdot \mathrm{i}\omega\,R_2\,C_1}{1 - \omega^2\,R_1\,R_2\,C_1\,C_2 + \mathrm{i}\omega(R_2\,C_1 + R_1\,C_1 + R_2\,C_2)} = 1$$

$$\begin{cases} 1 - \omega^2 R_1\,R_2\,C_1\,C_2 = 0 \\ \frac{F\,R_2\,C_1}{R_2\,C_1 + R_1\,C_1 + R_2\,C_2} = 1 \end{cases}$$

Självsvängningsfrekvens

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1\,R_2\,C_1 C_2}} = \ldots = 100\,\mathrm{krad/s}$$

$$F = \frac{R_2\,C_1 + R_1\,C_1 + R_2\,C_2}{R_2\,C_1} = 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} = 21$$