2006–11–29

Andragradsfaktorer

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\,k\,\omega_0 + \omega_0^2}$$

För $0 \leqslant k < 1$ är polerna komplexa.

Asymptotiskt diagram:

Låt $k = 1$ ⟨fig1⟩.

För $k < 1$ får vi en frekvenstopp vid $\omega = \omega_0$.

Bodediagram för sammansatta överföringsfunktioner: summera bidragen för de olika delfaktorerna. Approximera med de asymptotiska diagrammen

Förstärkares egenskaper i tidsplanet

□ Stegsvar. ⟨fig2⟩.

Först några definitioner: ⟨fig3⟩

t_d: 0 till 50% av slutvärde: *delay time*, fördröjning.

$t_r = t_2 - t_1$: 10% till 90% av slutvärde: *rise time*, stigtid.

t_s: *settling time*, insvägningstid; den tid det tar för u_{ut} att svänga in inom ett felband på $\pm\, p\%$ av slutvärdet.

Stigtid. Studera en första ordningens lågpasslänk:

$$\frac{U_{\text{ut}}}{U_{\text{in}}} = A(s) = \frac{A_0}{1 + \frac{s}{\omega_{\text{ö}}}}$$

Med $\omega_{\text{ö}} = \frac{1}{\tau}$ får vi

$$A(s) = \frac{A_0}{\tau} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tau} + s}$$

Amplitudkarakteristik ⟨fig4⟩.

Vad blir stegsvaret? ⟨fig5⟩

$$U_{\text{ut}}(s) = A(s) \cdot U_{\text{in}}(s)$$

Insignal $u_{\text{in}}(t) = \theta(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}$:

$$U_{\text{ut}}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\frac{A_0}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}}$$

Invers Laplacetransform ger

$$u_{\text{ut}}(t) = A_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot \theta(t)$$

⟨fig6⟩.

Stigtid: $t_r = t_2 - t_1$.

$$t_2\colon\quad 0.9\,A_0 = A_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t_2}{\tau}}\right)$$

$$t_1\colon\quad 0.1A_0 = A_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t_1}{\tau}}\right)$$

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-t_2/\tau} = 0.1 \\ \mathrm{e}^{-t_1/\tau} = 0.9 \end{cases}$$

Bilda kvot:

$$\frac{0.9}{0.1} = \frac{\mathrm{e}^{-t_1/\tau}}{\mathrm{e}^{-t_2/\tau}} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{e}^{\frac{t_2 - t_1}{\tau}} = 9$$

Logaritmera:

$$t_r = t_2 - t_1 = \tau \ln 9$$

Alltså:

$$t_r = 2.2 \cdot \tau = \frac{2.2}{\omega_{\text{ö}}}$$

$$t_r \cdot \omega_{\text{ö}} = 2.2$$

Hög vinkelfrekvens $\Rightarrow$ kort stigtid.

$$f_{\text{ö}} = \frac{\omega_{\text{ö}}}{2\pi}$$

Då får vi $t_r \cdot f_{\text{ö}} = 0.35$.

Kaskadkopplng av n stycken lika första ordningens lågpasslänkar. $\langle$fig7$\rangle$.

$$A_1(\mathrm{i}\omega) = \frac{A_0}{1 + \mathrm{i}\,\frac{\omega}{\omega_1}}$$

$$G(\mathrm{i}\omega) = [A_1(\mathrm{i}\omega)]^n = \frac{A_0^n}{\left(1 + \mathrm{i}\,\frac{\omega}{\omega_1}\right)^n}$$

$$\left|G(\mathrm{i}\omega_{\text{ö,tot}})\right| = \left|\frac{A_0}{1 + \mathrm{i}\,\frac{\omega_{\text{ö,tot}}}{\omega_1}}\right|^n = \frac{A_0^n}{\sqrt{2}}$$

(Definitionen som ger totala övre brytvinkelfrekvensen $\omega_{\text{ö,tot}}$)

$$\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{\text{ö,tot}}}{\omega_1}\right)^2}\right]^n = \sqrt{2}$$

Kvadrera och dra n:te roten ur:

$$1 + \left(\frac{\omega_{\text{ö,tot}}}{\omega_1}\right)^2 = 2^{\frac{1}{n}}$$

$$\Longrightarrow \quad \omega_{\text{ö,tot}} = \omega_1\sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1} \quad \Longleftarrow$$

Man kan även visa att approximativt gäller

$$\omega_{\text{ö,tot}} \cdot t_{r,\text{tot}} \approx 2.2$$

Oberoende av hur många steg som kaskadkopplas.

Kaskadkoppling av n st olika första ordningens lågpasslänkar.

$$|G(\mathrm{i}\omega)|_{\omega=\omega_{\text{ö,tot}}} = \frac{A_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_{\text{ö,tot}}}{\omega_1}\right)^2}} \cdot \frac{A_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_{\text{ö,tot}}}{\omega_2}\right)^2}} \cdots \frac{A_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_{\text{ö,tot}}}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{A_0^n}{\sqrt{2}}$$

Antag $\frac{\omega_{\text{ö,tot}}}{\omega_1} \ll 1, \frac{\omega_{\text{ö,tot}}}{\omega_2} \ll 1$, osv; samt att $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \ldots \approx \omega_n$.

Serieutveckla och försumma högre ordningens termer. Då fås

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{\omega_{\text{ö,tot}}} \approx 1.1 \sqrt{\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \cdots + \frac{1}{\omega_n^2}} \quad \Longleftarrow$$

Notera: Detta samband är approximativt.

Genom att utnyttja $\omega_1 \cdot t_{r,1} \approx 2.2, \omega_{\text{ö,tot}} \cdot t_{r,\text{tot}} \approx 2.2.$ får vi

$$t_{r,\text{tot}} \approx 1.1\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2}$$

Undre gränsvinkelfrekvens för en högpassförstärkare.

Överföringsfunktion för ett första ordningens HP-länk.

$$H(s) = \frac{s\,k}{1+\frac{s}{\omega_1}}$$

Låt $k = \frac{1}{\omega_1}$. Frekvenssvar:

$$H(\mathrm{i}\omega) = \frac{\mathrm{i}\,\frac{\omega}{\omega_1}}{1+\mathrm{i}\,\frac{\omega}{\omega_1}}$$

⟨fig8⟩

$$H(\mathrm{i}\omega) = \frac{1}{-\mathrm{i}\,\frac{\omega_1}{\omega} + 1}$$

Ta belopp

$$|H(\mathrm{i}\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 + 1}}$$

$$|H(\mathrm{i}\omega)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \text{ för } \omega = \omega_1$$

ω_1 är undre brytvinkelfrekvensen (gränsvinkelfrekvens).

Kaskadkoppling av n st lika första ordningens högpasslänkar.

$$G(\mathrm{i}\omega) = [H(\mathrm{i}\omega)]^n$$

$$|G(\mathrm{i}\omega_{\mathrm{u,tot}})| = \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_1}{\omega_{\mathrm{u,tot}}}\right)^2 + 1}}\right]^n = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1^n}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Kvadrera och dra n:te roten ur.

$$\left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_{\mathrm{u,tot}}}\right)^2 + 1\right]^n = 2$$

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_{\mathrm{u,tot}}}\right)^2 = 2^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$\omega_{\mathrm{u,tot}} = \frac{\omega_1}{\sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1}}$$