2006–11–28

Egenskaper i frekvensplanet

□ Ideal integrator. ⟨fig1⟩

Antag ideal operationsförstärkare, negativ återkoppling $\Rightarrow \varepsilon = 0$.

Strömmsummeing vid A: $i_{\text{op}} = 0$, $i_1 + i_2 = 0$.

$$\frac{U_{\text{in}}}{R} + \frac{U_{\text{ut}}}{\frac{1}{s\,C}} = 0$$

$$\frac{U_{\text{ut}}}{U_{\text{in}}} = -\frac{1}{s\,R\,C}$$

alternativt $U_{\text{ut}}(t) = -\frac{1}{R\,C} \cdot \frac{1}{s} U_{\text{in}}(s)$.

Invers Laplacetransform ger

$$u_{\text{ut}}(t) = -\frac{1}{R\,C} \int_0^t u_{\text{in}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + u_0$$

Överföringsfunktion:

$$\frac{U_{\text{ut}}}{U_{\text{in}}} = -\frac{1}{s\,R\,C} = H(s)$$

Frekvensfunktion ($s = \mathrm{i}\omega$):

$$H(\mathrm{i}\omega) = \frac{-1}{\mathrm{i}\,\omega\,R\,C}$$

⟨fig2⟩. Olämplig koppling i "verkligheten". För $u_{\text{in}} = 0$ kommer biasströmmen från operationsförstärkarens utgång vilket gör att kapacitansen laddas upp och u_{ut} kommer att ändras i takt med att spänningen över kapacitansen växer.

□ Ideal derivator

⟨fig3⟩. Ideal operationsförstärkare. Negativ återkoppling $\Rightarrow \varepsilon = 0$. $i_{\text{op}} = 0$. KCL_{A}:

$$\frac{u_{\text{in}}}{\frac{1}{s\,C}} + \frac{u_{\text{ut}}}{R} = 0$$

$$\frac{u_{\text{ut}}}{u_{\text{in}}} = -\,s\,R\,C$$

$$u_{\text{ut}}(s) = -\,R\,C \cdot s\,U_{\text{in}}(s)$$

En derivering!

$$u_{\text{ut}}(t) = -\,R\,C\,\frac{\mathrm{d}u_{\text{in}}}{\mathrm{d}t}(t)$$

Överföringsfunktion

$$H(s) = \frac{u_{\text{ut}}(s)}{u_{\text{in}}(s)} = -\,s\,R\,C$$

Frekvensfunktion $H(\mathrm{i}\omega) = -\,\mathrm{i}\omega R\,C$ ⟨fig4⟩.

Kretsen är mycket känslig för brus och störningar av högre frekvens. Dessa oönskade signaler förstärks mycket.

□ Första ordningens lågpassfilter (Användbar itegrator, “integrator med glömska”).

Ideal operationsförstärkare, negativ återkoppling, $\varepsilon = 0$. $i_{\text{op}} = 0$. Strömsummering vid minusingången:

$$\frac{u_{\text{in}}}{R_1} + \frac{u_{\text{ut}}}{R_2 \Big\| \frac{1}{s\,C}} = 0$$

$$R_2 \Big\| \frac{1}{s\,C} = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{s\,C}}{R_2 + \frac{1}{s\,C}} = \frac{R_2}{1 + R_2\,s\,C}$$

$$\frac{u_{\text{ut}}}{u_{\text{in}}} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + s\,R_2\,C}$$

Frekvensfunktion ($s = \mathrm{i}\omega$):

$$H(\mathrm{i}\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + \mathrm{i}\,\omega\,R_2\,C}$$

$H(s)$ har en pol i $s = -\frac{1}{R_2\,C}$.

Låt oss studera det allmänna uttrycket

$$G(s) = \frac{k}{1 + \frac{s}{\omega_0}}$$

med

$$G(\mathrm{i}\omega) = \frac{k}{1 + \mathrm{i}\,\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Grafisk beskrivning ⟨fig6⟩. Frekvensfunktion:

$$|G(\mathrm{i}\omega)| = \frac{|k|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\arg G = \arg\{k\} - \operatorname{argtan}\frac{\omega}{\omega_0}$$

För vår krets: $K = -\frac{R_2}{R1}$, $w_0 = \frac{1}{R_2\,C}$. ⟨fig7⟩.

Utgå ifrån ett linjärt system med överföringsfunktionen $G(s)$ och frekvensfunktionen $G(\mathrm{i}\omega)$.

Bodediagrammet: En grafisk presenetation av frekvensfunktionen. Två delar: Amplituddiagram, logaritmisk frekvensskala, logaritmisk amplitudskala [dB]. $|G(\mathrm{i}\omega)|_{\text{dB}} = 20\log_{10}|G(\mathrm{i}\omega)|$; Fasdiagram, logaritmisk frekvensskala.

Konstruktion: Faktorisera överförningsfunktionen $G(s)$:

$$G(s) = \frac{C_1(s)\,C_2(s)\cdots C_k(s)}{D_1(s)\,D_2(s)\cdots D_n(s)}$$

Faktorerna $C_i(s)$ och $D_i(s)$ är

K en konstant, s derivering/integr, $1+\frac{s}{\omega_1}$ förstagradsfaktor, $1+s\,\frac{2\alpha}{\omega_2}+\frac{s^2}{\omega_2^2}$ andragradsfaktor.

Amplituddiagram:

$$|G(\mathrm{i}\omega)| = \frac{|C_1(\mathrm{i}\omega)|\cdot|C_2(\mathrm{i}\omega)|\cdots|C_k(\mathrm{i}\omega)|}{|D_1(\mathrm{i}\omega)|\cdot|D_2(\mathrm{i}\omega)|\cdots|D_n(\mathrm{i}\omega)|}$$

och uttryck i dB:

$$|G(\mathrm{i}\omega)|_{\mathrm{dB}} = |C_1(\mathrm{i}\omega)|_{dB} + |C_2(\mathrm{i}\omega)|_{\mathrm{dB}} + \cdots + |C_k(\mathrm{i}\omega)|_{\mathrm{dB}} - |D_1(\mathrm{i}\omega)|_{\mathrm{dB}} - |D_2(\mathrm{i}\omega)|_{\mathrm{dB}} - \cdots - |D_n(\mathrm{i}\omega)|_{\mathrm{dB}}$$

Fasdiagram:

$$\arg G(\mathrm{i}\omega) = \sum_{i=1}^{k} \arg C_i(\mathrm{i}w) - \sum_{i=1}^{n} \arg D_i(\mathrm{i}\omega)$$

Superposition av bidrag från varje delfaktor!

Studera delfaktorer:

• $H(s)=s, H(\mathrm{i}\omega)=\mathrm{i}\omega$. $\langle$fig8$a\rangle$ Luting:

$$\left|\frac{G(\mathrm{i}\,10\omega_1)}{G(\mathrm{i}\omega_1)}\right|_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}\left|\frac{10\omega_1}{\omega_1}\right| = 20$$

Stiger med 20 dB/dekad, alt. stiger med 6 dB/oktav. $\langle$fig8$b\rangle$

• $H(s)=\frac{1}{s}$, $H(\mathrm{i}\omega)=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}$. $\langle$fig9$a\rangle$ Lutning: faller med 20 dB/dekad, 6 dB/oktav. $\langle$fig9$b\rangle$.

• $H(\mathrm{i}\omega)=K$. $\langle$fig10$\rangle$

• $H(s)=\frac{1}{1+\frac{s}{\omega_1}}$; $H(\mathrm{i}\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{i}\,\frac{\omega}{\omega_1}}$

$$|H(\mathrm{i}\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}$$

$$\arg H(\mathrm{i}\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\omega_1} + 2k\pi$$

$\langle$fig11$\rangle$. Maximal avvikelse mellan verklig kurva och asymptot för $\omega=\omega_1$.

$$|H(\mathrm{i}\omega)|_{\mathrm{dB}} = \left|\frac{1}{\sqrt{1+1}}\right|_{\mathrm{dB}} = -3\mathrm{dB}$$

ω_1 kallas brytvinkelfrekvens. $\langle$fig12$\rangle$. Maximal avvikelse mellan verklig kurva och asymptotiskt diagram: 5.7°.

• $H(s)=1+\frac{s}{\omega_1}$; $H(\mathrm{i}\omega)=1+\mathrm{i}\frac{\omega}{\omega_1}$.

$$|H(\mathrm{i}\omega)|_{\mathrm{dB}} = \left[\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}\right]_{\mathrm{dB}}$$

$\langle$fig13$\rangle$