2006–11–10

Uppgift 13.2 jω-transformera kretsen $\langle$fig1$\rangle$. $R = 10\Omega, C = 0.02\mu\mathrm{F}, L = 0.34\,\mathrm{H}$.

$$u_0(t) = 10\cos(\omega t)$$

$$U_0 = 10\underline{/0°}$$

a)

$$Z = R + \mathrm{i}\,\omega\,L + \frac{1}{\mathrm{i}\omega\,C} = R + \mathrm{i}\left(\omega L - \frac{1}{\omega\,C}\right)$$

Resonans (vid $\omega = \omega_0$): $\mathrm{Im}\,Z(\mathrm{i}\omega) = 0$.

$$\omega_0\,L = \frac{1}{\omega_0\,C} \quad \Longrightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}} = \ldots = 12.1\cdot 10^3\,\mathrm{rad/s}$$

b) Beräkna I, U_R, U_L och U_C. För $\omega = \omega_0 \Longrightarrow Z(\mathrm{i}\omega) = R$.

$$I = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{R} = 1\underline{/0°}\,\mathrm{A}$$

$$U_R = I\,R = 1\underline{/0°}\cdot 10 = 10\underline{/0°}$$

Obs! $U_R = U_0$.

$$U_C = I\cdot\frac{1}{\mathrm{i}\,\omega_0\,C} = -\,\mathrm{i}\,I\,\frac{\sqrt{L\,C}}{C} = -\,\mathrm{i}\,I\sqrt{\frac{L}{C}} = -\,\mathrm{i}\cdot 4.12\cdot 10^3\,\mathrm{V}$$

$$U_L = \ldots = \mathrm{i}\cdot 4.12\cdot 10^3\,\mathrm{V}$$

Obs! $U_C = -\,U_L$. $|U_c| \gg |U_0\,|$.

c) Bandbredd

$$B = \frac{\omega_0}{Q}$$

För vår resonanskrets

$$Q = \frac{\omega_0\,L}{R}$$

$$B = \frac{\omega_0\,R}{\omega_0\,L} = \frac{R}{L} = \ldots = 29.4\ \mathrm{rad/s}$$

och

$$Q = \frac{\omega_0\,L}{R} = \ldots = 412$$

d) Byt C mot C_1 så att strömmen blir:

$$|I_1| = \frac{|I|}{\sqrt{2}}$$

$$I_1 = I_m \underline{/\alpha}$$

$$Z_1 = R + \mathrm{i}\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_1}\right)$$

$$U_0 = Z_1 \cdot I_m \underline{/\alpha}$$

$$\frac{U_0}{I_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} = Z_1 = R + \mathrm{i}\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_1}\right)$$

Ta belopp^2 (blir av med α):

$$\left|\frac{U_0}{I_m}\right|^2 = R^2 + \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_1}\right)^2$$

$$\pm\sqrt{\left|\frac{U_0}{I_m}\right|^2 - R^2} = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_1}$$

$$\frac{1}{\omega_0 C_1} = \omega_0 L \pm \sqrt{\left|\frac{U_0}{I_m}\right|^2 - R^2}$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\omega_0 L \pm \sqrt{\left|\frac{U_0}{I_m}\right|^2 - R^2}}$$

$$C_1 = \sqrt{L C} \cdot \frac{1}{\frac{L}{\sqrt{L C}} \pm \sqrt{\left|\frac{U_0}{I_m}\right|^2 - R^2}}$$

$$C_1 = \underbrace{\frac{\sqrt{\mathrm{LC}}}{\sqrt{\frac{L}{C}}}}_{=C} \cdot \frac{1}{1 \pm \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \sqrt{\left|\frac{U_0}{I_m}\right|^2 - R^2}}$$

$$U_0 = R \cdot I, \quad \left|\frac{I}{I_m}\right|^2 = 2$$

$$C_1 = C \cdot \frac{1}{1 \pm \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot R\sqrt{2-1}}$$

$$C_1 = C \cdot \frac{1}{1 \pm R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

Alternativ 1:

$$C_1 = C \cdot \frac{1}{1 + 10\sqrt{\frac{0.02 \cdot 10^{-6}}{0.34}}} = C \cdot 0.99758$$

Alternativ 2:

$$C_1 = C \cdot \frac{1}{1 - 10\sqrt{\frac{0.02 \cdot 10^{-6}}{0.34}}} = C \cdot 1.00243$$

Effektivvärde. Om effektivvärdet används för strömmar och spänningar "försvinner" $\frac{1}{2}$ i formlerna för effekt. Likhet med DC-fallet uppnås.

EXEMPEL.

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha)$$

fås effektivvärdet $I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$. Effektformlerna för en resistans: $P = R\, {I_e}^2$ och reaktansen $Q = X\, I_e^2$.

Vår nätspänning på 230 V är ett effektivvärde. Toppvärdet är alltså $\sqrt{2} \cdot 230$ V.

Uppgift 14.4 ⟨fig2⟩. Sinusformat stationärtillstånd.

$$i_0(t) = 3\cos(4\,t)\text{ A}$$

$$I_0 = 3\underline{/0°}$$

$$v_0(t) = \sqrt{2}\cos(4\,t + 45°)\text{ V}$$

$$V_0 = \sqrt{2}\underline{/45°} = 1 + \mathrm{i}$$

Sök effekt i 2Ω-resistansen.

Välj maskanalys. Tvåpolsomvandla (Norton → Thevenin). ⟨fig3⟩. $\mathcal{R}_m \mathcal{I} = \mathcal{U}_0$:

$$\begin{pmatrix} 6 + 3\,\mathrm{i} & -3 - 2\,\mathrm{i} \\ -3 - 2\,\mathrm{i} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(1 + \mathrm{i}) \\ -1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Beräkna I_1 (Cramers regel):

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 + 3\,\mathrm{i} & -3 - 2\,\mathrm{i} \\ -1 - \mathrm{i} & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 + 3\,\mathrm{i} & -3 - 2\,\mathrm{i} \\ -3 - 2\,\mathrm{i} & 4 \end{vmatrix}} = \ldots = \frac{11 + 7\,\mathrm{i}}{19 + 0\,\mathrm{i}} = \frac{13.0\angle 32.5°}{19\angle 0°}$$

$$|I_1| = \frac{13}{19}$$

$$P_R = \frac{1}{2} R\, |I|^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{13}{19}\right)^2 = 0.47\text{ W}$$

T1 ⟨fig4⟩. Nätet saknar begynnelseenergi. När byter strömmen $i(t)$ riktning första gången?

Laplacetransformera kretsen ($t \geqslant 0$). ⟨fig5⟩. KVL:

$$-\frac{E}{s} + I(s) \cdot 1 + I(s) \cdot s + I(s) \cdot \frac{1}{s} = 0$$

$$\frac{E}{s} = I(s) \left(1 + s + \frac{1}{s}\right)$$

$$I(s) = \frac{E}{s\,(1 + s + \frac{1}{s})} = \frac{E}{s^2 + s + 1}$$

$$I(s) = \frac{E}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2\,E}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$i(t) = \frac{2\,E}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \cdot \theta(t)$$

Första teckenbytet: $\sin\pi = 0$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\,t = \pi \Longrightarrow t = \frac{2\,\pi}{\sqrt{3}}\ \mathrm{s}$$