2006–11–06

KVL och jω-metoden

För en sluten sligna i en krets:

$$v_1(t) + v_2(t) + \cdots + v_n(t) = 0$$

Summan av grenspänningar i en slinga är noll.

Endast stationära sinusformade signaler (med samma frekvens).

$$V_{m1}\cos(\omega t + \phi_1) + V_{m2}\cos(\omega t + \phi_2) + \cdots + V_{mn}\cos(\omega t + \phi_n) = 0$$

$$\mathrm{Re}\left[V_{m1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \phi_1)}\right] + \cdots + \mathrm{Re}\left[V_{\mathrm{mn}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \phi_n)}\right] = 0$$

$$\mathrm{Re}\left[\left(V_{m1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1} + \cdots + V_{mn}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right] = 0$$

$$\mathrm{Re}\left[(V_1 + V_2 + \cdots + V_n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right] = 0$$

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_n = 0$$

På motsvarande sätt kan jω-metoden appliceras med KCL då strömmar i en nod summeras

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_n = 0 \quad \text{där } i_k \rightleftharpoons I_k; \quad i_k(t) = I_{mk}\cos(\omega t + \phi_k); \quad k = 1, \ldots, n$$

Impedans, Z. I likhet med Ohms lag för resistanser ($U = R\,I$) definierar vi impedans Z enligt $U = Z\,I$, $Z = \frac{U}{I}$ där $U \rightleftharpoons u(t), I \rightleftharpoons i(t)$.

För $U = U_m\angle\phi$, $I = I_m\angle\beta$ fås

$$Z = \frac{U_m\angle\phi}{I_m\angle\beta} = \frac{U_m}{I_m}\underline{/\phi - \beta} = |Z|\angle\theta$$

Z transformeras *inte* till tidsdomänen (saknar mening), endast spänning och ström, U och I.

Grafiskt $Z = |Z|\angle\theta = |Z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = R + \mathrm{i}\,X$, där R kallas resistans och X kallas reaktans.

Admittans: Y

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z\angle\theta} = |Y|\underline{/-\theta}$$

Om $Z = R + \mathrm{i}X$:

$$Y = \frac{1}{R + \mathrm{i}X} = \frac{R - \mathrm{i}X}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - \mathrm{i}\,\frac{X}{R^2 + X^2} = G + \mathrm{i}\,B$$

där G är konduktans och B är susceptans.

Seriekoppling av impedanser: ⟨fig1⟩. Ekvivalent impedans: $Z_{\mathrm{eq}} = \sum_{k=1}^{n} Z_k$.

Parallellkoppling av admittanser: ⟨fig2⟩. Ekvivalent admittans: $Y_{\mathrm{eq}} = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

Eftersom följande samband gäller efter transformering enligt jω-metoden (då vi studerar stationära växelströmskretsar); KVL, KCL, $U = Z \cdot I$; kan följande metoder för DC-kretsar appliceras även på AC-kretsar med använding av jω-metoden.

- Maskanalys

- Nodanalys
- Superposition
- Ekvivalenta tvåpoler (Norton, Thevenin)
- Δ-Y-transformation
- Spänningsdelning
- Strömdelning

Passiv tvåpol

En elektronisk krets uppbygd av kretselementen R, L och C. Transformering vid växelström (jω).

Impedans $Z = \frac{U}{I} = R + \mathrm{i}\, X = |Z| \angle \theta$. Passiv tvåpol, $R \geqslant 0$ och $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. $Z = Z(\mathrm{i}\omega)$ är frekvensberoende.

Egenskapen hos en passiv tvåpol belyses ofta (grafiskt) med $|Z|$ och $\arg Z = \theta$ som funktion av vinkelfrekvensen ω.

Exempel: seriekopplad resistans och induktans. RL-krets.

$$Z = R + \mathrm{i}\omega L$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \theta = \arctan \frac{\omega L}{R}$$

⟨fig3⟩

RC-krets: resistans och kapacitans i serie.

$$Z = R + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}, \quad \arg Z = -\arctan \frac{1}{\omega R C}$$

Resonanskretsar (parallell) ⟨fig5⟩. Jobba med admittanser

$$Y_{\mathrm{eq}} = \sum_{k=1}^{n} Y_k = \mathrm{i}\,\omega C + \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega L} + G = G + \mathrm{i}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\mathrm{Re}\, Y_{\mathrm{eq}} = G = \text{konstant}$$

$$\mathrm{Im}\, Y_{\mathrm{eq}} = B(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L}$$

$B = 0$ för $\omega = \omega_0$ (Resonans!):

$$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \quad \Rightarrow \quad w_0 = \frac{1}{\sqrt{L C}}$$

$$I_C = V \cdot \mathrm{i}\,\omega C = [\omega = \omega_0] = \mathrm{i}\, \frac{V C}{\sqrt{L C}} = \mathrm{i}\, V \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$I_L = V \cdot \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega L} = [\omega = w_0] = -\mathrm{i}\, V \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Obs: $I_L \neq 0$, $I_C \neq 0$, samt $I_L = -I_C$.

I_L och I_C kan vara betydligt större än I. ($I = I_R$). De är lika stora till belopp men ur fas med 180°.

Ekvivalent krets (sett utifrån) vid resonans.

Serieresonanskrets ⟨fig6⟩

$$Z = Z_{\mathrm{eq}} = \sum_{k=1}^{n} Z_k = R + \mathrm{i}\omega L + \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega\, C} =$$

$$= R + \mathrm{i}\left(\omega\, L - \frac{1}{\omega\, C}\right) = R + \mathrm{i}\, X$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\arg Z = \arctan \frac{X}{R}$$

Vid $\omega = \omega_0$ sägs kretsen vara i resonans om $\mathrm{Im}(Z) = 0$.

$$Z|_{\omega=\omega_0} = R$$

och

$$\omega_0\, L = \frac{1}{\omega_0\, C}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\, C}}$$

$$V_L = I \cdot \mathrm{i}\omega L = [\omega = \omega_0] = \mathrm{i}\, I \frac{L}{\sqrt{L\, C}} = \mathrm{i}\, I \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$V_C = \ldots = -\,\mathrm{i}\, I \sqrt{\frac{L}{C}}$$

OBS! $V_L \neq 0, V_C \neq 0$. De är lika stora till belopp men ur fas med 180°.

V_L och V_C kan vara betydligt större än V. Ekvivalent krets (sett utifrån) ⟨fig7⟩.

Z vid fler frekvenser än ω_0 ⟨fig8⟩

Överföringsfunktion

Begreppet överföringsfunktion används mycket. Vid sinusformat stationärtillstånd studeras "specialfallet" frekvenssvar. Beteckning $H(\mathrm{i}\omega)$.

$$H(\mathrm{i}\omega) = \frac{\text{“utsignalens visare”}}{\text{“insignalens visare”}}$$

⟨fig9⟩

$$H(\mathrm{i}\omega) = \frac{U_{\mathrm{ut}}}{U_{\mathrm{in}}}$$

Exempel ⟨fig10⟩. Spänningsdelning

$$U_{\text{ut}} = U_{\text{in}} \cdot \frac{\frac{1}{\mathrm{i}\omega C}}{R + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}} = U_{\text{in}} \cdot \frac{1}{1 + \mathrm{i}\,\omega R C}$$

$$H(\mathrm{i}\omega) = \frac{U_{\text{ut}}}{U_{\text{in}}} = \frac{1}{1 + \mathrm{i}\,\omega R C}$$

$$|H(\mathrm{i}\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega R C)^2}}$$

$$\arg H(\mathrm{i}\omega) = -\arctan(\omega R C)$$

$H(\mathrm{i}\omega)$ i vårt exempel är ett lågpassfilter. Grafiskt ⟨fig11⟩.

Bandbredd ω_b anges som

$$|H(\mathrm{i}\omega)|\big|_{\omega=\omega_b} = \frac{|H|_{\max}}{\sqrt{2}}$$

"halveffektsvärde".

Växelströmseffekt ⟨fig12⟩

Kretsen mottar effekten $p(t) = u(t) \cdot i(t)$, "ögonblicksvärde". Här måste vi ha samordnade referensriktningar. Vid sinusformad växelström

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta_u)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

Låt strömmen utgöra riktfas. Strömmen i har sitt maxvärde vid $t = 0$.

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta_u - \theta_i)$$

$$i(t) = I_m \cos \omega t$$

$$p(t) = U_m I_m \cos(\omega t + \theta_u - \theta_i) \cdot \cos \omega t$$

$$\left[\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)\right]$$

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2}(\cos(\theta_u - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_u - \theta_i))$$

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\theta_u - \theta_i) + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\theta_u - \theta_i) \cos(2\omega t) - \frac{1}{2} U_m I_m \sin(\theta_u - \theta_i) \sin(2\omega t)$$

Skriv om som

$$p(t) = P + P\cos(2\omega t) - Q\sin(2\omega t)$$

där

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\theta_u - \theta_i)$$

$$Q = \frac{1}{2} U_m I_M \sin(\theta_u - \theta_i)$$

P blir här medeleffekt/aktiv effekt. Q är reaktiv effekt.

Momentan effekt

- Resitiv krets. Ström och spänning i fas, $\theta_u - \theta_i = 0$.

$$p(t) = P + P\cos(2\omega t)$$

- Rent induktiv krets, spänning 90° före strömmen. $\theta_u - \theta_i = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow P = 0$.

$$p(t) = -Q\sin(2\,\omega\,t), \quad Q > 0$$

- Rent kapacitiv krets, spänning 90° efter strömmen. $\theta_u - \theta_i = -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow P = 0$.

$$p(t) = -Q\sin(2\omega t), \quad Q < 0$$

$\cos\varphi = \cos(\theta_u - \theta_i)$ kallas effektfaktorn.

Komplex effekt

$$S = P + \mathrm{i}Q$$

$$S = \frac{1}{2}U\,I^* = \frac{1}{2}U_m\underline{/\theta_u} \cdot I_m\underline{/-\theta_i} = \frac{1}{2}U_m\,I_m\,\underline{/\theta_u - \theta_i} =$$

$$= \frac{1}{2}U_m\,I_m\cos(\theta_u - \theta_i) + \mathrm{i}\,\frac{1}{2}U_m\,I_m\sin(\theta_u - \theta_i)$$

Dimensioner:

$$[S] = \mathrm{VA}, \quad [P] = \mathrm{W}, \quad [Q] = \mathrm{VAr}$$

För en passiv tvåpol med impedans $Z = R + \mathrm{i}\,X$.

$$S = \frac{1}{2}U\,I^* = \frac{1}{2}Z \cdot I \cdot I^* = \frac{1}{2}(R + \mathrm{i}\,X)|I|^2 = \frac{1}{2}R\,|I|^2 + \mathrm{i}\,\frac{1}{2}X\,|I|^2 = P + \mathrm{i}\,Q$$

$$P = \frac{1}{2}R\,|I|^2$$

$$Q = \frac{1}{2}X\,|I|^2$$

eller

$$S = \frac{1}{2}U\,I^* = \left[I^* = \frac{U^*}{Z^*}\right] = \frac{1}{2}U\,\frac{U^*}{Z^*} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|U|^2}{Z^*} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|U|^2}{|Z|^2} \cdot Z = \frac{1}{2}\frac{|U|^2}{|Z|^2}(R + \mathrm{i}\,X) = P + \mathrm{i}Q$$