2006–11–03

AC-nät. Vi studerar sinusformade signaler (ström och spänning).

$$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{med} \begin{cases} y(t)\text{:} & \text{momentanvärde vid tidpunkten } t \\ Y_m\text{:} & \text{amplitud} \\ \omega\text{:} & \text{vinkelfrekvens} \\ \phi\text{:} & \text{fasvinkel} \\ T\text{:} & \text{periodtiden: } y(t) = y(t+T) \forall t \end{cases}$$

$\langle$fig1$\rangle$.

$$T = \frac{1}{f} \quad \omega = 2\,\pi\, f = \frac{2\,\pi}{T}$$

Signalen $y(t)$ kan representeras av ett komplext tal, en visare, enligt $Y = Y_m\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$. $\langle$fig2$\rangle$. (Vi skalar bort tidsberoendet då vi betraktar visaren, Y).

Förenklat skrivsätt: $Y = Y_m\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = Y_m \angle \phi$.

Samand mellan $y(t)$ och Y:

$$y(t) = \mathrm{Re}\{Y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\} = \mathrm{Re}\Big\{Y_m\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \phi)}\Big\} = Y_m \cos(\omega t + \phi)$$

$y(t) \rightleftharpoons Y$ ("Ett transformpar"). Exempel:

$$u(t) = 10\cos(100\pi t + 45°)$$

$$U = 10\angle 45°$$

Växelströmsnät $\langle$fig3$\rangle$.

$$u_0 = A_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

KVL, $t \geqslant 0$:

$$\begin{cases} -u_0 + i\, R + u = 0 \\ i = C\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

Eliminera strömmen i.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{R\,C}\, u(t) = \frac{1}{R\,C}\, u_0(t) = \frac{1}{R\,C}\, A_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

Antag ingen begynnelsespänning över kapacitansen C, $u(0) = 0$.

Lösning:

$$u = u_h + u_p$$

där u_p är partikulärlösningen (stationärlösningen), och u_h är homogenlösningen. Ger transient förlopp. Vi är tills vidare bara intresserade av stationärlösningen då alla insvängingsförlopp (transienter) har klingat ut.

Elektriska växelströmsnät kan beskrivas med ordinära, linjära differentialekvationer, med reella och konstanta koefficienter.

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0\, y = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

y är sökt ström eller spänning. Högerledet bestäms av de oberoende källorna i nätet.

Summan av ett godtyckligt antal sinusformade signaler, alla med samma vinkelfrekvens ω, och deras derivator av godtycklig ordning, är också en sinusformad signal med vinkelfrekvensen ω. Vänsterledet är också en sinusformad signal. Lösningen reduceras till att finna amplitud och fas hos $y(t)$. Detta blir då stationärlösningen. Använd jω-metoden.

Inför visarna

$$y(t) \rightleftharpoons Y$$

$$x(t) \rightleftharpoons X = X_m \angle \varphi$$

Transformering av derivator:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{Re}\left\{Y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right\}\right] = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{i}\omega\, Y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right\} \rightleftharpoons \mathrm{i}\omega\, Y$$

På samma sätt:

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} = (\mathrm{i}\omega)^n\, Y$$

jω-transformera differentialekvationen:

$$\left[a_n(\mathrm{i}\omega)^n + a_n(\mathrm{i}\omega)^{n-1} + \cdots + a_1\,\mathrm{i}\omega + a_0\right] Y = X_m \angle \varphi$$

$$Y = \frac{X_m \angle \varphi}{a_n(\mathrm{i}\omega)^n + a_n(\mathrm{i}\omega)^{n-1} + \cdots + a_1\,\mathrm{i}\omega + a_0} = Y_m \angle \Phi$$

vilket ger

$$x(t) = Y_m \cos(\omega t + \Phi)$$

Y_m bestäms som $|Y|$ och Φ bestäms som $\arg\{Y\}$.

Direkt jω-transformerad av växelströmskretsar

Kretselement

- Resistans ⟨fig4⟩

Spänning och ström som visare (jω-mteoden):

$$u(t) \rightleftharpoons U, \quad i(t) \rightleftharpoons I$$

R är en konstant.

$$U = R \cdot I$$

Ström och spänning är i fas. ⟨fig5⟩.

- Induktans ⟨fig6⟩.

$$u = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Spänning och ström som visare:

$$u(t) \rightleftharpoons U\,, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \rightleftharpoons \mathrm{i}\omega\, I$$

$$U = \mathrm{i}\omega\, L\, I$$

⟨fig7⟩. Spänning ligger 90° före strömmen.

Inför begreppet **impedans**. Ohms lag för växelström:

$$U = Z\, I$$

För indkuktans (notera frekvensberoendet):

$$Z_L = \mathrm{i}\omega\, L$$

- Kapacitans ⟨fig8⟩.

$$i(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

Spänning och ström som visare:

$$i(t) \rightleftharpoons I, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \rightleftharpoons \mathrm{i}\omega\, U$$

$$I = C \cdot \mathrm{i}\omega \cdot U$$

$$U = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\, C} \cdot I$$

⟨fig9⟩.

$$\text{Impedans } Z_C = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\, C} = -\,\mathrm{i}\,\frac{1}{\omega C}, \quad [Z_C] = \Omega$$

Spänningen ligger 90° efter strömmen.

Källor. Alla källor är sinusformade med samma vinkelfrekvens ω.

Exempel:

$$u_0 = U_m \cos(\omega t + \phi_1) \rightleftharpoons U_0 = U_m \angle \phi_1$$

$$i_0 = I_m \cos(\omega t + \phi_2) \rightleftharpoons I_0 = I_m \angle \phi_2$$

Beräkningsmetod. Transformera nätet till komplex form (jω-metoden) och analysera med samma metoder som för likströmsnät.