Övning 2006–03–01

4.6 Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x,y)=4\,x^2\,y^2-2\,x\,y^4-3\,x^2$$

i kvadraten $D=\{(x,y)\colon 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2\}$.

Steg 1 Stationära inre punkter.

$$\begin{cases} f'_x=8\,x\,y^2-2\,y^4-6\,x=0 \\ f'_y=8\,x^2\,y-8\,x\,y^3=0 \end{cases} \underset{\substack{x\,y\neq 0 \\ \text{(inre punkt)}}}{\Longleftrightarrow} \quad x=y^2$$

$$4\,x^2-x^2-3\,x=0$$

$$x^2=x\Longrightarrow x=1$$

$(1,1)$ är en inre punkt.

Steg 2 Randpunkter.

Rand 1: $x=0, 0\leqslant y\leqslant 2$: $f(0,y)=0$.

Rand 2: $y=0, 0\leqslant x\leqslant 2$: $f(x,0)=-3\,x^2$, minsta värde -12 för $(2,0)$.

Rand 3: $x=2, 0<y<2$: $f(2,y)=16\,y^2-4\,y^2-12=g_1(y)$.

$$g_1'(y)=4(28y-4\,y^3)=8\left(\frac{1}{2}-y^2\right)y$$

$$f(2,\sqrt{2})=32-16-12=4$$

Rand 4: $y=2, 0<x<2$: $f(x,2)=16\,x^2-32\,x-3\,x^2=13\,x-32\,x=g_2(x)$

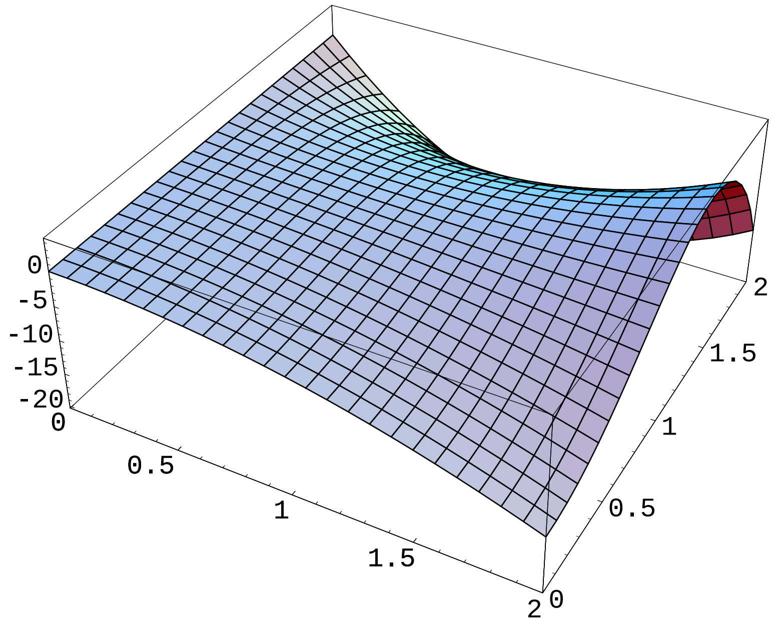
$$g'(x)=26\,x-32=0 \quad \text{då} \quad x=\frac{16}{13}$$

$$f\left(\frac{16}{13},2\right)=\frac{16^2}{13}-32\cdot\frac{16}{13}=\frac{-16\cdot 16}{13}=-\frac{256}{13}$$

f är kontinuerlig, D kompakt, alltså antar f ett största och ett minsta värde på D. Dessa måste finnas bland:

- $f(1,1)=-1$
- $f(0,y)=0$
- $f(2,0)=-12$
- $f(2,\sqrt{2})=4$
- $f\left(\frac{16}{13},2\right)=-\frac{256}{13}$
- Hörnpunkt: $f(2,2)=4(16-16-3)=-12$

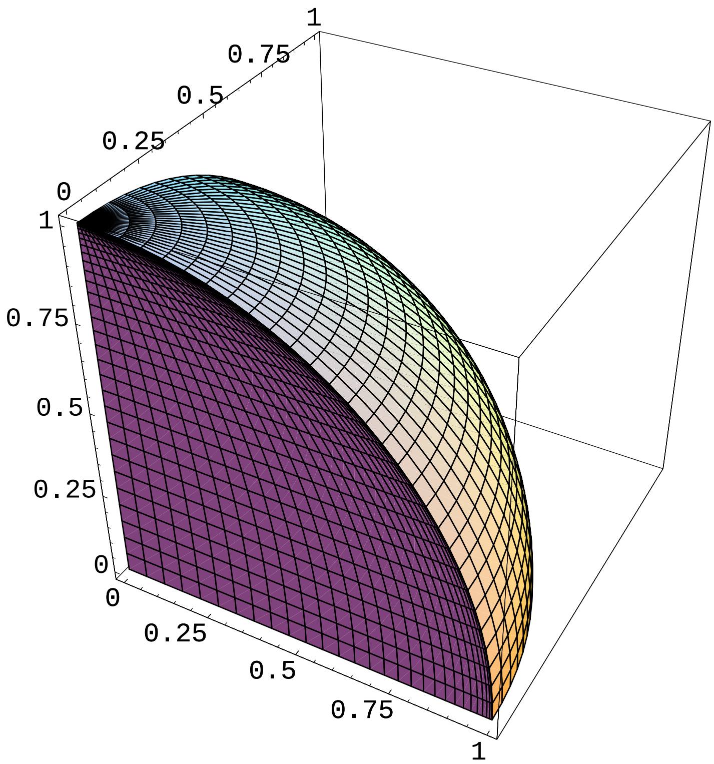
Svar: max är 4, min är $-\frac{256}{13}$.



4.15 Bestäm största och minsta värde av funktionen

$$f(x, y, z) = x\,y\,z + x\,y$$

i området $K = \{(x, y) : x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$. K ser ut som så:



Inre punkter: vi har $f'_z(x, y, z) = x\,y \neq 0$ i alla inre punkter: inga stationära inre punkter.

Randpunkter

Rand 1: $x=0$: $f(0,y,z)=0$

Rand 2: $y=0$: $f(x,0,z)=0$

Rand 3: $z=0$: $f(x,y,0)=x\,y$. Bestäm största och minsta värde som $u(x,y)=x\,y$ antar på D. D är rand 3.

1) inre punkter: inga ($f_x'=y\neq 0$)

2) randpunkter: bestäm max min av u under bivillkoret $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$

Lagrange: grad $g=(2x,2y)\neq(0,0)$ på kurvan $g=0$. Alltså:

$$\begin{cases} u_x'=\lambda_0\,g_x' \\ u_y'=\lambda_0\,g_y' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=\lambda_0\,2x \\ x=\lambda_0\,2y \end{cases} \underset{x\neq 0}{\Longrightarrow} \frac{y}{x}=\frac{x}{y} \Longrightarrow y^2=x^2 \Longrightarrow y=x$$

Bivillkoret ger $2x^2=1$: $u\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$.

Rand 4: randen till rand 4 har vi redan. Sök max/min av f under bivillkoret $g(x,\,y,\,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$. Det gör vi med Lagranes multiplikatormetod:

$$\text{grad}\,g=(2\,x,2\,y,2\,z)\neq\mathbf{0} \quad (\text{på } g=0)$$

$$\begin{cases} f_x'=\lambda_0\,g_x' \\ f_y'=\lambda_0\,g_y' \\ f_z'=\lambda_0\,g_z' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y\,z+y=\lambda_0\,2x \\ x\,z+x=\lambda_0\,2y \\ x\,y=\lambda_0\,2x \end{cases}$$

Vi har nu $x\,y\,z\neq 0$, $z\neq 1$.

$$2\lambda_0=\frac{y(z+1)}{x}=\frac{x(z+1)}{y}=\frac{x\,y}{z}$$

$$y^2=x^2 \Longrightarrow y=x$$

$$z+1=\frac{x^2}{z}$$

och bivillkoret: $1-z^2=2\,x^2$

$$z^2+z=\frac{1}{2}(1-z^2)$$

$$3\,z^2+2\,z=1$$

$$z^2+\frac{2}{3}\,z=\frac{1}{3}$$

$$\left(z+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

$$z=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$x^2=\frac{1}{2}\left(1-z^2\right)=\frac{4}{9}\Longrightarrow x=\frac{2}{3}$$

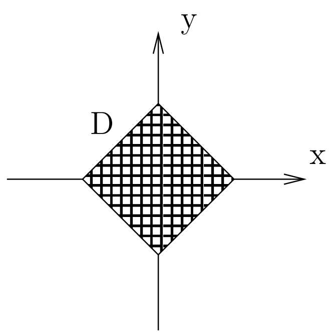
f är kontinuerlig, K kompakt, alltså antar f ett största och ett minsta värde på K. De finns bland

- $f(0,y,z)=f(x,0,z)=0$
- $\frac{1}{2}$ från randen till rand 3.
- $f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}+\frac{4}{9}=\frac{16}{27}$

4.42 Sök max/min av

$$f(x,y)=x^2+y^2-3x$$

på D: $|x|+|y|\leqslant 1$.



$$f(x,y)=x^2+y^2-3x=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2-\frac{9}{4}$$

Studera nivåkurvorna: $x=1, y=0$ ger minimum $=-2$,

$x=-1, y=0$ ger maximum $=4$.