2006–02–23

10.53 $\boldsymbol{u} = (x\,y\,z, x\,y^2\,z^3 - z, x\,y^3\,z^2)$

Beräkna <fig10.53>

$$\int_{\gamma=\partial Y} \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \overset{\text{Stokes}}{=\!=} \iint_Y \operatorname{rot}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iint_Y \left(3\,x\,y^2 z^2 - 3\,z\,y^2\,z^2 + 1, \mathfrak{Q}, \mathfrak{G}\right)\cdot(1,0,0)\mathrm{d}S =$$

(Räkna gärna ut $\mathfrak{Q}$ och $\mathfrak{G}$ som övning, även om vi inte behövde det här.)

$$= \iint_Y \mathrm{d}S = m(Y) = \pi$$

10.55 γ är en enkel, sluten kurva i planet $z = k$, dvs $\gamma = \partial Y$, $Y \subseteq \text{planet}\, z = k$.

$$\int_\gamma x\cos z\,\mathrm{d}x + y\sin z\,\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = \pm\iint_Y \operatorname{rot}(x\cos z, y\sin z, z)\cdot(0,0,1)\mathrm{d}S =$$

$$= \pm\iint_Y (\ldots,\ldots,0-0)\cdot(0,0,1)\mathrm{d}S = 0$$

Om γ inte är enkel, räcker det om den kan uppdelas i ändligt många enkla, slutna kurvor, varvid resonemanget ovan kan tillämpas <fig10.55>

10.56 <fig10.56> γ är skärningen med $z = 1 + 2\,x$. $z = x^2 + y^2 = 1 + 2x \Longleftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2$.

$$A = \int_\gamma (0, x, -y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \overset{\text{Stokes}}{=\!=} \iint_Y \operatorname{rot}(0, x, -y)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S =$$

$$= \iint_Y (-1, 0, 1)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S =$$

Plan π: $2\,x - z = 1$: normal $\boldsymbol{n}_{\text{onormerad}} = \pm(2, 0, -1)$. Ur figuren ser vi att z-koordinaten ska vara positiv.

$$= \iint_D (-1,0,1)\cdot(-2,0,1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2\pi = 6\pi$$

10.62 $\boldsymbol{u} = (2\,x\,y^2\,z, 2\,x^2\,y\,z, x^2y^2 - 2z) = \operatorname{grad}\Phi \Longleftrightarrow \operatorname{rot}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = \left(2\,x^2\,y - 2\,x^2\,y\,, 2\,x\,y^2 - 2\,x\,y^2, 4\,x\,y\,z - 4\,x\,y\,z\right) = \boldsymbol{0}$$

Svar: Ja, Φ finns. Alltså: arbetet längs C från $\boldsymbol{r}(0) = (1,0,0)$ till $\boldsymbol{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1,1)$ är $\Phi(0,1,1) - \Phi(1,0,0)$ där $\operatorname{grad}\Phi = \boldsymbol{u}$, dvs

$$\begin{cases} \Phi'_x = 2\,x\,y^2 z & \Longrightarrow \quad \Phi(x,y,z) = x^2\,y^2\,z + \Psi(y,z) \\ \Phi'_y = 2\,x^2\,y\,z & \\ \Phi'_z = x^2\,y^2 - 2\,z & \end{cases}$$

$$\Phi'_y = 2\,x^2 y\,z + \Psi'_y(y,z) \Longrightarrow \Psi(y,z) = f(z)$$

$$\Phi'_z = x^2y^2 - 2z = x^2y^2 + f'(z) \Longrightarrow f'(z) = -2\,z \Longrightarrow f(z) = -z^2 \quad (\text{ev.} + \text{konst})$$

Svar: $\Phi(x,y,z) = x^2y^2z - z^2$ (kolla), arbetet är $A = \Phi(0,1,1) - \Phi(1,0,0) = -1$.

10.68 $\boldsymbol{F} = (y^2\sin(x\,y), x\,y\sin(x\,y) - \cos(x\,y) + z^2\sin(y\,z), y\,z\sin(y\,z) + \sin z - \cos(y\,z))$.

Visa att rot $\boldsymbol{F} = (0, 0, 0)$, vi visar att rot $\boldsymbol{F} = 0$, dvs att $\boldsymbol{F}$ är konservativt genom att beräkna en potential $\Phi\,(\nabla\Phi = \operatorname{grad}\Phi = \boldsymbol{F})$.

$$\begin{cases} \Phi'_x = y^2 \sin x\,y \\ \Phi'_y = x\,y \sin x\,y - \cos x\,y + z^2 \sin y\,z \\ \Phi'_z = y\,z \sin y\,z + \sin z - \cos y\,z \end{cases}$$

Integrerar Φ'_x:

$$\Phi(x, y, z) = -\,y \cos x\,y + \Psi(y, z)$$

Bestäm Ψ så att ekvationen för Φ'_y är uppfylld:

$$\Phi'_y = x\,y \sin x\,y - \cos x\,y + z^2 \sin y\,z = -\cos x\,y + x\,y \sin x\,y + \Psi'_y(y, z)$$

$$\Psi'_y = z^2 \sin y\,z \Longrightarrow \Psi(y, z) = -\,z \cos y\,z + f(z)$$

Vi har hittills:

$$\Phi(x, y, z) = -\,y \cos x\,y - z \cos y\,z + f(z)$$

Nu tar vi Φ'_z till hjälp:

$$\Phi'_z = y\,z \sin y\,z + \sin z - \cos y\,z = -\cos y\,z + z\,y \sin y\,z + f'(z) \Longrightarrow f'(z) = \sin(z)$$

$$f(z) = -\cos z \quad (+\,\text{konst})$$

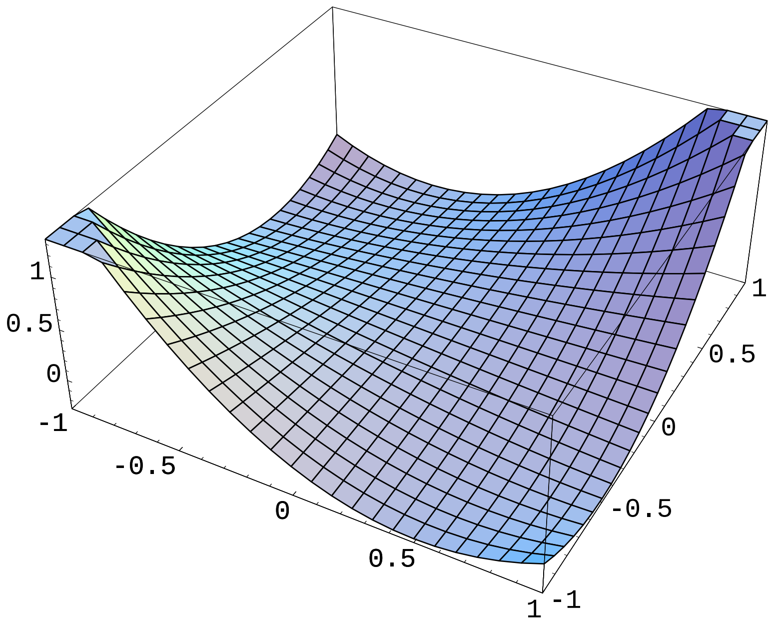
$$\Phi(x, y, z) = -\,y \cos x\,y - z \cos y\,z - \cos z$$

$\Longrightarrow \boldsymbol{F}$:s arbete från $(0, 0, 0)$, längs godtycklig kurva, till $(\pi, 1, \pi)$ är

$$A = \Phi(\pi, 1, \pi) - \Phi(0, 0, 0) = 1 + \pi + 1 + 1 = 3 + \pi \approx 6,14159265358979323846\ldots$$

Över till kapitel 4

4.3 Sök max/min som funktionen $f(x, y) = x\,y + x^2 y^2$ antar på D: $|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1$. Rita alltid!



(konstigheterna vid hörnen är mathematicas fel)

Kandidater

$(0,0)$

$\left(x, -\frac{1}{2x}\right) \qquad -1 < x < 1$

$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

$\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

$$\begin{cases} f'_x = y + 2\,x\,y^2 = 0 = y(1 + 2\,x\,y) \\ f'_y = x + 2x^2 y = 0 = x(1 + 2\,x\,y) \end{cases}$$

Fall 1: $y=0 \Longleftrightarrow x=0$

Fall 2: $x\,y \neq 0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2x}$.

2. Randpunkter.

rand 1: $x=-1, -1<y<1$: $f(-1,y)=-y+y^2=g_1(y)$: $g_1'(y)=-1+2\,y=0$ ger $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

rand 2: $y=-1, -1<x<1$: $f(x,-1)=-x+x^2=g_2(y)$: $g_2'(x)=-1+2\,x=0$ ger $\left(\frac{1}{2},-1\right)$

rand 3: $x=1, -1<y<1$: $f(1,y)=y+y^2=g_3(y)$: $g_3'(y)=1+2\,y=0$ ger $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$

rand 4: $y=1, -1<x<1$ ger $\left(-\frac{1}{2},1\right)$

3. Svar med motivering:

f är kontinuerlig, D är kompakt $\Longrightarrow$ f antar max/min, dessa måste finnas bland

$$f(0,0)=0$$

$$f\left(x,-\frac{1}{2x}\right)=-\frac{1}{4}=f\left(-1,\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2},-1\right)=f\left(1,-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2},1\right)$$

$$f(-1,-1)=2$$

$$f(1,-1)=0=f(-1,1)$$

$$f(1,1)=2$$

Minsta värde: $-\frac{1}{4}$, största värde: 2.