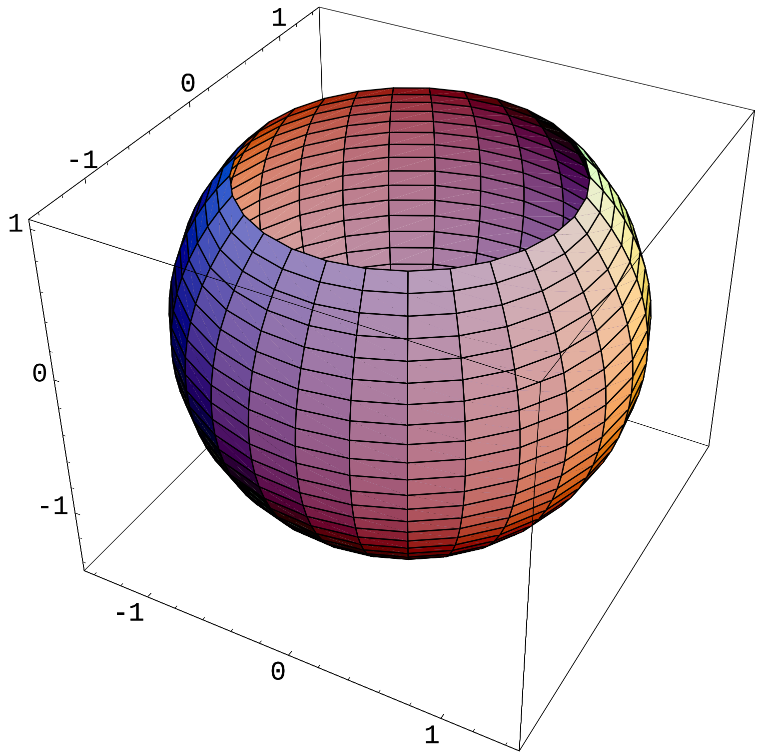
Övning 2006–02–22

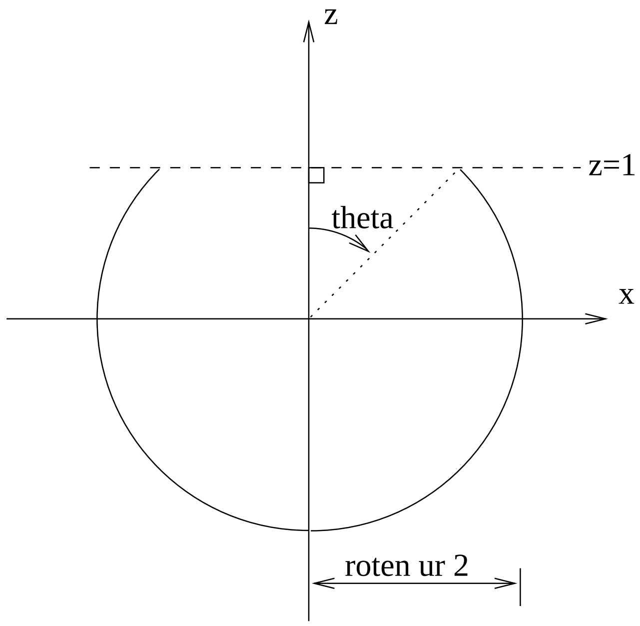
10.13

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = c\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

Sökt är flödet av $\boldsymbol{u}$ ut genom $Y = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2 \,\text{och}\, z \leqslant 1\}$:



Betraktar snittet med x-z-planet:



Om radien är $\sqrt{2}$ och sfären är kapad på höjden 1 ger det oss vinkeln $\theta = \frac{\pi}{4}$ enligt figuren. Om vi låter θ gå från $\frac{\pi}{4}$ till π har vi alltså halva kurvan, rotera det hela kring z-axeln och vi har hela ytan.

a)

$$Y\colon \begin{cases} x = \sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi \\ y = \sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi \\ z = \sqrt{2}\cos\theta \end{cases}, \quad (\theta,\varphi) \in D\colon \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \pi \end{cases}$$

b)

$$\boldsymbol{r}'_\theta \times \boldsymbol{r}'_\varphi = \sqrt{2}\sin\theta\,\boldsymbol{r} \quad [\text{DO IT AGAIN}]$$

$$F = \iint_Y \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = c\iint_D \frac{\boldsymbol{r}}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\theta\,\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= c\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = c\cdot 2\pi\,[-\cos\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = 2\pi c\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

10.31 Beräkna flödet av $\boldsymbol{v} = (x, y, z)$ genom ytan $Y\colon z = \sqrt{x^2+y^2-15}$, $(x, y) \in D$:

$$D\colon 16 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 40$$

<fig10.31>

$$\boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y = (-z'_x, -z'_y, 1) \quad [\text{Vet!}]$$

$$F = \iint_Y \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iint_D \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2-15}\right)\cdot(z'_x, z'_y, -1) =$$

$$= \iint_D \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2-15}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-15}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-15}}, -1\right) =$$

$$= \iint_D \left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2-15}} - \sqrt{x^2+y^2-15}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = [\text{polära koordinater}] =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_4^{\sqrt{40}}\left(\frac{r^2}{\sqrt{r^2-15}} - \sqrt{r^2-15}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi\int_4^{\sqrt{40}}\frac{15r}{\sqrt{r^2-15}}\,\mathrm{d}r = 30\pi\left[\sqrt{r^2-15}\right]_4^{\sqrt{40}} = 30\pi(5-1) = 120\pi$$

10.54 Beräkna med hjälp av Stokes' sats, där γ är randen till en ya i planet $2x + y + 2z = 5$ vars area är 3:

$$A = \int_\gamma 0\mathrm{d}x + (3x + z\cos yz)\mathrm{d}y + (y - 2x + y\cos yz)\mathrm{d}z$$

Lösning (Stokes): <fig10.54>

$$A = \pm\iint_Y \operatorname{rot}(0, 3x + z\cos yz, y - 2x + y\cos yz)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

Vad är normalen? Givet är att γ genomlöps i negativ led sett från origo. Sett från $\boldsymbol{n} = (2, 1, 2)$ genomlöps ∂Y positivt.

$$A = \iint_Y \operatorname{rot}(0, 3\,x + z\cos y\,z,\, y - 2\,x + y\cos y\,z) \cdot (2,1,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1 + 2^2}}\,\mathrm{d}S =$$

$$= \iint_Y (1 + \cos y\,z - y\,z\sin y\,z - \cos y\,z + z\,y\sin y\,z, 2, 3) \cdot (2,1,2) \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}S =$$

$$= \frac{1}{3}\iint_Y (1,2,3)\cdot(2,1,2)\,\mathrm{d}S = \frac{10}{3} \cdot \iint_Y \mathrm{d}S = \frac{10}{3}\,m(Y) = 10$$