Övning 2006–02–09

6.54

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-3x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

är generaliserad i ∞, men *inte* i noll:

$$0 \leqslant f(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-3x}}{x} & \text{om } x \neq 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

$f(x)$ är kontinuerlig i 0 (Taylor).

Man kan "se":

$$\frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-3x}}{x} = \left[-\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-yx} \right]_{y=2}^{3} = \int_2^3 \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y \quad (x > 0)$$

Alltså:

$$I = \int_0^\infty \left(\int_2^3 \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = [\text{Fubini}] = \int_2^3 \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int_2^3 \left[-\frac{1}{y}\mathrm{e}^{-xy} \right]_{x=0}^{x=\infty} \mathrm{d}x = \int_2^3 \left(\frac{1}{y} - 0 \right) \mathrm{d}y = \ln\frac{3}{2}$$

6.43 Är integralen konvergent?

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{x^2}{(1+x^2)(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_{D: x^2+y^2 \leqslant 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I_1 + I_2$$

I_1 är konvergent:

$$0 \leqslant \frac{x^2}{(1+x^2)(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{1}{(1+x^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{(1+r^2 \cos^2 \varphi) r} \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi$$

r i täljaren tar ut r i nämnaren: konvergent.

I_2 är konvergent:

$$\frac{x^2}{(1+x^2)(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Konvergent:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r}{r^3} \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi$$

7.10 $K: x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$

$$\iiint_K (x^2+y^2+z^2+a^2+b^2+c^2-2\,a\,x-2\,b\,y-2\,c\,z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z =$$

(rymdpolära koordinater)

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{r=0}^{1} (r^2+a^2+b^2+c^2-2\,a\,r \sin\theta \cos\varphi - 2\,b\,r \sin\theta \sin\varphi - 2\,c\,r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\pi} \sin\theta \left(\int_{\varphi=} \left(r^4 + r^2(a^2+b^2+c^2) - 2\,a\,r^3 \sin\theta \cos\varphi - 2\,b\,r^3 \sin\varphi - 2\,c\,r^3 \cos\varphi\right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r$$

$$= 2\,\pi \int_0^1 \int_0^{\pi} \left(\left(r^4 + r^2(a^2+b^2+c^2)\right)\sin\theta - 2\,c\,r^3 \cos\theta \sin\theta\right) \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\left[(r^4+r^2(a^2+b^2+c^2)\right]\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} - c\,r^3 \left[\sin^2\theta\right]_0^{\pi}\right) \mathrm{d}r =$$

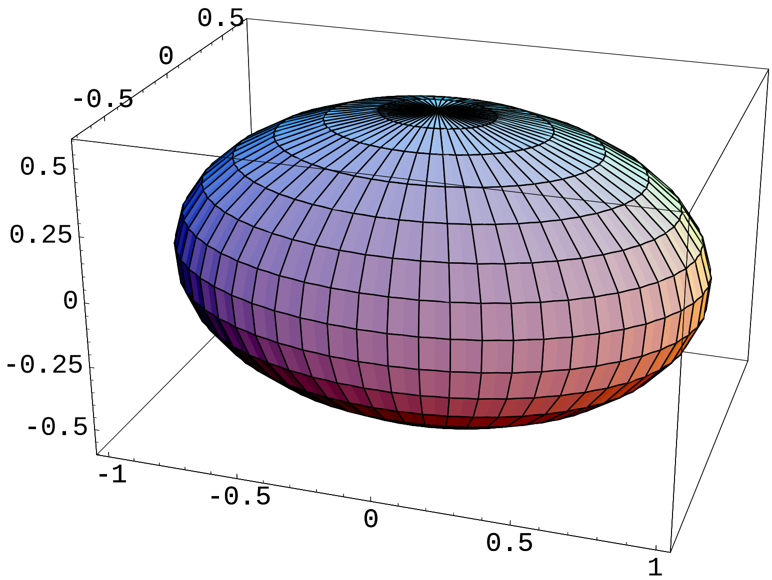
$$= 4\,\pi \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\right)$$

7.15 Beräkna

$$I = \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-(x^2+2y^2+3z^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Välj som uttömmande följd: K_n: $x^2+2y^2+3z^2 \leqslant n^2$. Elliptiska rymdpolära koordinater:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} r\sin\theta\sin\varphi \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}} r\cos\theta \end{cases}$$



$$\frac{\mathrm{d}(x,y,z)}{\mathrm{d}(r,\theta,\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{6}} r^2 \sin\theta$$

$$I_n = \iiint_{K_n} \mathrm{e}^{-(x^2+2y^2+3z^2)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{n} \frac{1}{\sqrt{6}} \mathrm{e}^{-r^2} r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}[-\cos\theta]_0^{\pi}\left(-\frac{n}{2}\mathrm{e}^{-n^2} + \frac{1}{2}\int_0^{n} \mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\right)$$

$$\longrightarrow I = \frac{4\pi}{\sqrt{6}}\left(0 + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\right) = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}}$$

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Har tagits upp tidigare, lär in härledning.

Bernhard: "Det här otroligt stora gasmolnet som sträcker sig över hela universum: titta vad litet det är!"

9.3 Beräkna $A = \int_\gamma (x^2 + x\,y)\mathrm{d}x + (y^2 - x\,y)\mathrm{d}y$.

Är $\boldsymbol{F} = (x^2 + x\,y, y^2 - x\,y)$ konservativt?

$$(y^2 - x\,y)'_x = -y$$

$$(x^2 + x\,y)'_y = x$$

Nej! Dessa båda var olika.

a)

$$\gamma\colon \begin{cases} x = t, & \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ y = t, & \mathrm{d}y = \mathrm{d}t \end{cases}, \quad 0 \xrightarrow{t} 2$$

Alltså:

$$A = \int_0^2 (t^2 + t^2 + t^2 - t^2)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\,t^3\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

b)

$$\gamma\colon \begin{cases} x = t, & \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ y = \frac{1}{2}t^2, & \mathrm{d}y = t\,\mathrm{d}t \end{cases}, \quad 0 \xrightarrow{t} 2$$

Alltså

$$A = \int_0^2 \left(t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \left(\frac{t^4}{4} - \frac{1}{2}\,t^3\right)t\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^2 \left(t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{t^5}{4} - \frac{t^4}{2}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{24}t^6 - \frac{1}{10}t^5\right]_0^2 = \ldots$$

c) γ går först (C_1) från $(0,0)$ raka vägen till $(2,0)$, därefter (C_2) vidare raka vägen till $(2,2)$

$$\gamma = C_1 + C_2\colon \quad A = \int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$C_1\colon \begin{cases} x = t, & \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ y = 0, & \mathrm{d}y = 0\,\mathrm{d}t \end{cases}, \quad 0 \xrightarrow{t} 2$$

$$C_2\colon \begin{cases} x = 2, & \mathrm{d}x = 0\,\mathrm{d}t \\ y = t, & \mathrm{d}y = \mathrm{d}t \end{cases}, 0 \xrightarrow{t} 2$$

$$A = \int_0^2 t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^2 (t^2 - 2\,t) = 2\int_0^2 (t^2 - t)\,\mathrm{d}t = 2\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right)$$

9.4

$$\int_\gamma y \ln \frac{x^2}{y} \, dx + \left(- \frac{x}{y} \right) dy$$

γ går från $(1, 1)$ till $(2, 4)$ längs med kurvan $y = x^2$. (P, Q) är $\mathcal{C}^1$ i en öppen mängd $\Omega \supseteq \gamma$.

$$\gamma \colon \begin{cases} x = t, & dx = dt \\ y = t^2, & dy = 2\,t\,dt \end{cases}, \quad 1 \xrightarrow{t} 2$$

$$A = \int_1^2 \left(t^2 \ln 1 - \frac{t}{t^2} \cdot 2\,t \right) dt = \int_1^2 (-2) dt = -2$$

9.9 Beräkna längs $\gamma \colon x^2 + y^2 = 4$ moturs:

$$A = \int_\gamma (x^3 - x^2\, y) dx + x\, y^2\, dy =$$

Enligt Green (positivt orienterad rand, $D \colon x^2 + y^2 \leqslant 4$):

$$= \iint_D (y^2 + x^2) dx dy = [\text{polärt}] = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3\, dr\, d\varphi =$$

$$= \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 \cdot 2\pi = 8\pi$$

9.41 $\boldsymbol{F} = (P, Q) = \left(\frac{-y}{x^2 + 4\,y^2}, \frac{x}{x^2 + 4\,y^2} \right)$

$$Q'_x = \frac{x^2 + 4\,y^2 - 2\,x^2}{(x^2 + 4y^2)^2}$$

$$P'_y = \frac{-1\,(x^2 + 4\,y^2) + 8\,y^2}{(x^2 + 4y^2)^2}$$

Lika: Green:

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx\, dy = 0$$

Fel, Usch! Funktionen är inte $\mathcal{C}^1$. Förutsättningarna för att använda Greens sats finns inte. Men kurvintegralen hade varit enkel att räkna ut längs ellipsen $x^2 + 4\,y^2 = 1$. <fig33>.

$$\int_{C + C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx\, dy = 0$$

dvs

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{-C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\frac{1}{2}\sin\varphi(-\sin\varphi)}{1} + \frac{\cos\varphi\, \frac{1}{2}\cos\varphi}{1} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} = \pi$$

med

$$-C_1\colon \begin{cases} x=\cos\varphi, & \mathrm{d}x=-\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ y=\frac{1}{2}\sin\varphi, & \mathrm{d}y=\frac{1}{2}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{cases}, \quad 0\xrightarrow{\varphi}2\pi$$

9.12 (Bra typtal)

$$A=\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x+(1+x\,y^2)\mathrm{d}y$$

$$\gamma\colon \langle \text{fig32}\rangle$$

För att kunna använda Green kompletterar vi med C_1.

$$\int_{\gamma+C_1} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D y^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\int_{\gamma+C_1} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_\gamma P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+\int_{C_1} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\sin^2\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi+\int_1^{-1}(0+1)\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\sin^2\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi-2$$

$$C_1\colon \begin{cases} x=0, & \mathrm{d}x=0\,\mathrm{d}t \\ y=t, & \mathrm{d}y=\mathrm{d}t \\ 1\xrightarrow{t}-1 \end{cases}$$

Högra sidan:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\sin^2\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{4}\frac{1}{2}\pi$$

$$A=\frac{\pi}{8}+2$$