Övning 2006–01–26

2.68 c) Avgör om f har lokalt extremvärde i origo, om $f(x, y, z) = \mathrm{e}^{xyz}(1 - \arctan(x^2 + y^2 + 2z^2))$.

Bernhard: Visa att $(0, 0, 0)$ är en stationär punkt och avgör dess karaktär.

$$f(0,0,0) = 1$$

Maclaurin:

$$\mathrm{e}^t = 1 + \text{högre ordnings termer}$$

$$\arctan t = t + \text{högre ordnings termer}$$

$$f(x,y,z) = (1 + \text{högre}) \cdot \bigl(1 - (x^2 + y^2 + 2z^2) + \text{högre}\bigr)$$

$$f(x,y,z) = 1 - (x^2 + y^2 + 2z^2) + R_3(x,y,z)$$

$$Q(h,k,l) = -2\bigl(h^2 + k^2 + 2\,l^2\bigr)$$

negativt definit $\Longrightarrow$ origo är en sträng lokal maximipunkt!

2.68 d) $f(x,y,z) = 1 + x^2 + 2\,y^2 + 4\,z^2 - 2\,x\,y - 2\,x\,z + 6\,y\,z$

$$Q(h,k,l) = 2\bigl(h^2 + 2\,k^2 - 2\,h\,k - 2\,h\,l + 4\,l^2 + 6\,k\,l\bigr) =$$

$$= 2\Bigl((h - k - l)^2 + 2k^2 + 3\,l^2 + 4\,k\,l\Bigr) =$$

$$= 2\Bigl((h - k - l)^2 + (k + 2\,l)^2 - l^2\Bigr)$$

Q är indefinit, ty $Q(1,1,0) > 0$, $Q(-1,-2,1) < 0$

2.71 d) Fysikaliska lagar skrivs gärna "på differentialform" (för att understryka variablernas oberoende).

Exempel: "Gaslagen": p är tryck, V är volym, T är temperatur

$$f(p,V,T) = \frac{p \cdot V}{T} = \text{konstant}$$

Skrivs gärna upp så:

$$\mathrm{d}f = f_p'\,\mathrm{d}p + f_V'\,\mathrm{d}V + f_T'\,\mathrm{d}T = 0$$

$$\mathrm{d}f = \frac{V}{T}\mathrm{d}p + \frac{p}{T}\mathrm{d}V - \frac{p\,V}{T^2}\,\mathrm{d}T = 0$$

3.13

$$\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}(t_1,t_2) = f(g_1(t_1,t_2), g_2(t_1,t_2))$$

$$\boldsymbol{g}(t_1,t_2) = \bigl(t_1^2 + t_2^2, t_1^2 - t_2^2\bigr)$$

$$\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}(t_1,t_2) = \left(\sqrt{\frac{t_1^2 + t_2^2 + t_1^2 - t_2^2}{2}}, \sqrt{\frac{t_1^2 + t_2^2 - (t_1^2 - t_2^2)}{2}}\right) = (t_1,t_2)$$

Identitetsavbildningen.

$$\frac{\partial \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{ enhetsmatrisen}$$

3.18

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = \sin(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (u, v) \end{gathered}$$

Är den lokalt bijektiv? Nej, omöjligt, inte i någon punkt. Det ger

$$\frac{\mathrm{d}(u, v)}{\mathrm{d}(x, y)} = 0$$

ty $\boldsymbol{T}$ är ej bijektiv. Eller:

$$\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2\,x\cos(x^2 + y^2) & 2\,y\cos(x^2 + y^2) \end{vmatrix} = 0 \forall (x, y)$$

men inversa funktionssatsen ger då ingenting!

3.21

$$\begin{gathered} \boldsymbol{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (u, v, w) \end{gathered}$$

$$\begin{cases} u = x + y - z \\ v = x - y + z \\ w = x^2 + y^2 + z^2 - 2\,y\,z \end{cases}$$

Är $\boldsymbol{T}$ lokalt bijektiv?

$$\frac{\mathrm{d}(u, v, w)}{\mathrm{d}(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2x & 2y - 2z & 2z - 2y \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ x & y - z & z - y \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ x & y - z & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Inversa funktionssatsen ger ingenting.

$$\begin{cases} u = x + y - z \\ v = x - (y - z) \\ w = x^2 + (y - z)^2 \end{cases}$$

Detta visar att $\boldsymbol{T}$ inte är bijektiv lokalt i någon punkt (a, b, c), ty i varje omgivning till (a, b):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (y - c)^2 < \varepsilon^2$$

finns minst en punkt, t.ex. $\left(a, b + \frac{\varepsilon}{2}, c + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ så att $\boldsymbol{T}(a, b, c) = \boldsymbol{T}\left(a, b + \frac{\varepsilon}{2}, c + \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

3.25 $F(x, y) = \sin x\,y - \ln(x + y) = 0$ nivåkurva genom $(0, 1)$. $F(0, 1) = 0$. Lokalt kring $(0, 1)$ definierar $F(x, y) = 0$ funktionen $y = y(x)$, ty $F'_y = x\cos(x\,y) - \frac{1}{x+y}$, alltså $F'_y(0, 1) = -1 \neq 0$. Söker y':

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(x, y(x))) = F'_x + F'_y\,y' = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

alltså

$$F'_x \equiv y\cos x\,y - \frac{1}{x+y} = 0$$

$$y'(0) = -\frac{0}{-1} = 0\,(\text{svar})$$

3.27 $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2 z - y\,z - z = 0$; $F(0,0,0) = 0$

Lokalt kring $(0, 0, 0)$ definierar $F(x, y, z) = 0$ funktionen $z = z(x, y)$, enligt implicta funktionssatsen, ty

$$F'_y = 3\,z^2 - y - 1 \overset{i(0,0,0)}{=} -1 \neq 0$$

Söker z'_x och z'_y. För (x, y, z) nära $(0,0,0)$

$$z'_x\colon\quad \frac{\partial}{\partial x}F(x, y, z(x, y)) = F'_x \cdot 1 + F'_y \cdot 0 + F'_z \cdot z'_x = 0$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3\,x^2 + 2\,x\,z}{x^2 + 3\,z^2 - y - 1}$$

$$z'_y\colon\quad \frac{\partial}{\partial y}F(x, y, z(x, y)) = F'_x \cdot 0 + F'_y \cdot 1 + F'_z \cdot z'_y = 0$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{3\,y^2 - z}{x^2 + 3\,z^2 - y - 1}$$

Integralkalkyl

Beräkning av dubbelintegraler: "itererad".

$$D\colon \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$$

f kontinuerlig på D.

$$\iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

6.2 Bernhard: "rita alltid D". <figÖ6.2>

$$\iint\limits_\Delta \frac{1}{1+x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x+y}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^2 [\ln(1+x+y)]_{x=0}^{x=1}\,\mathrm{d}y = \int_0^2 (\ln(2+y) - \ln(1+y))\,\mathrm{d}y =$$

$$= [(2+y)\ln(2+y) - y - (1+y)\ln(1+y) + y]_0^2$$

Partiell integration (gör det hemma!). "Nu har jag gjort det snabbt, på mitt sätt, så ni förhoppningsvis inte hänger med och gör det hemma."