Övning 2006–01–25

$$\operatorname{grad} f = (f'_x, f'_y, \ldots)$$

(a, b) stationär:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{2}\{f''_{xx}(a, b)h^2 + 2f''_{xy}(a, b)\,h\,k + f''_{yy}(a, b)\,k^2\} + R_3(x, y)$$

Kvadratisk form $Q(h, k)$.

2.69 c) Avgör om funktionen har ett lokalt extremvärde i origo och bestäm i så fall dess karaktär:

$$f(x, y) = -2 + x^2 + 3\,x\,y + y^2 + x^2\,y$$

Visa: $(0, 0)$ är stationär, avgör dess typ.

$$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$$

$$Q(h, k) = 2h^2 + 6\,h\,k + 2\,k^2 = 2(h^2 + 3\,h\,k + k^2) = 2\left(\left(h + \frac{3}{2}k\right)^2 - \frac{5}{4}k^2\right)$$

Q är *indefinit*, t.ex.: $Q\left(-\frac{3}{2}, 1\right) < 0$, $Q(1, 0) > 0$.

Svar: $(0, 0)$ är en sadelpunkt.

2.67 Bestäm alla lokala extrempunkter till

$$f(x, y) = x^3y^2 + 27\,x\,y + 27\,y$$

I. Söker alla stationära punkter.

$$\begin{cases} f'_x = 3\,x^2\,y^2 + 27y = 0 \\ f'_y = 2\,x^3\,y + 27\,x + 27 = 0 \end{cases}$$

Bra lösning: $x\,f'_x - y\,f'_y = 0$.

Fall 1: $y = 0$, $f'_y = 0$ ger då $x = -1$. $\boxed{(x, y) = (-1, 0)}$

Fall 2: $y \neq 0$: $f'_x = 0$ ger $x^2y = -9$. $f'_y = 0$ ger då

$$-18\,x + 27\,x = -27 \Longrightarrow 9\,x = -27 \Longrightarrow x = -3$$

Detta ger då $\boxed{(x, y) = (-3, -1)}$

II. Söker karaktär.

	$(-1, 0)$	$(-3, -1)$
$f''_{xx} = 6\,x\,y^2$	0	-18
$f''_{xy} = 6\,x^2\,y + 27$	27	-27
$f''_{yy} = 2\,x^3$	-2	54

$$Q(h, k) \text{ i } (-1, 0): \quad Q(h, k) = 54\,h\,k - 2\,k^2$$

indefinit, $Q(0, 1) < 0$, $Q(1, 1) > 0$.

Svar: $(1, 0)$ är en sadelpunkt.

$$Q(h, k) \text{ i } (-3, -1): \quad Q(h, k) = -18h^2 - 54\,h\,k - 54\,k^2 = -18(h^2 + 3\,h\,k + 3\,k^2) =$$

$$= -18\left(\left(h^2 + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right)$$

negativt definit

Svar: $(-3, -1)$ är en lokal, sträng maximipunkt.