Övning 2006–01–19

2.14 $f(x,y)$ satisifierar $f'_x - 3f'_y = 0$. Visa: linjen $y = 1 - 3x$ är en nivåkurva till f,

dvs $f(x, 1-3x) =$ konstant (nivåkurva = höjdlinje).

Bevis. Linjen:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 3t \end{cases} : \quad h(t) = f(t, 1-3t)$$

$$h'(t) = f'_x \cdot x' + f'_y \cdot y' = f'_x \cdot 1 - 3f'_y = 0$$

Det vill säga: h är konstant. $\square$

2.21 Differentialekvation $2f'_x + f'_y = 0$. Inför nya variabler $u = x - ky$ och $v = x + ky$ där $k \neq 0$.

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = f'_u + f'_v$$

$$f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = -k f'_u + k f'_v$$

$$\Longrightarrow 2f'_x + f'_y = (2-k) f'_u + (2+k) f'_v \stackrel{!}{=} 0$$

Välj $k = -2$:

$$4f'_u = 0 \Longrightarrow f(u,v) = g(v)$$

I x, y-planet: $f(x,y) = g(x - 2y)$. [Detta är den allmänna lösningen]

Söker speciell lösning sådan att $f(x, 0) = \sin x \stackrel{!}{=} g(x)$.

<u>Svar:</u> $f(x,y) = \sin(x - 2y)$.

2.23 Differentialekvation: $y f'_x - x f'_y = x^3 y + x y^3$. $x > 0, y > 0$.

Ledning: Inför nya variabler:

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - y^2 \end{cases}$$

Lösning:

$$\begin{cases} f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = 2x f'_u + 2x f'_v \\ f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_u = 2y f'_u - 2y f'_v \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y f'_x - x f'_y = 0 + 4xy f'_v \stackrel{!}{=} x y (x^2 + y^2)$$

dvs (i u och v):

$$f'_v = \frac{1}{4} u \Longrightarrow f(u,v) = \frac{1}{4} u v + g(u)$$

I x-y-planet:

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(x^4 - y^4) + g(x^2 + y^2)$$

Speciell lösning:

$$f(x,x)=0+g(2x^2)\overset{!}{=}x^2 \Longrightarrow g(x)=\frac{x}{2} \Longrightarrow f(x,y)=\frac{x^4-y^4}{4}+\frac{x^2+y^2}{2}$$

2.35 "Bra uppgift kommer nu." $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Vilka värden antar $f'_{\boldsymbol{v}}$ i (2, 3, 6)? Det vill säga bestäm värdemängden till riktningsderivatan.

$$S^1: x^2+y^2+z^2=1$$

$$\text{Riktningsderivata: } \left.\begin{array}{c} S^1 \to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{v} \mapsto \operatorname{grad} f(2,3,6)\cdot \boldsymbol{v} \end{array}\right\} \text{ kontinuerlig, antar ett maximum } (S \text{ är kompakt})$$

Lösning: $f'_{\boldsymbol{v}}(2,3,6)=\operatorname{grad} f(2,3,6)\cdot \boldsymbol{v}$.

... antar maximum $\underset{\text{sats}}{\longrightarrow}$ nämligen $|\operatorname{grad} f(2,3,6)|$. (och minimum $=$ $-$maximum)

$$\operatorname{grad} f=2(x,y,z)$$

$$|\operatorname{grad} f(2,3,6)|=|2(2,3,6)|=2\sqrt{4+9+36}=14$$

S är bågvis sammanhängande, riktningsderivatan är kontinuerlig $\Rightarrow f'_{\boldsymbol{v}}(2,3,6)$ antar alla värden mellan -14 och 14 (inklusive).

2.58 a) Transformera differentialekvationen

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial f}{\partial x}=x\mathrm{e}^{-2y}$$

genom att införa de nya variablerna

$$\begin{cases} u=x\mathrm{e}^{-y} \\ v=y. \end{cases}$$

Lösning:

$$\underline{f'_x}=f'_u u'_x+f'_v v'_x=\underline{\mathrm{e}^{-y}f'_u}$$

$$\underline{f''_{xx}}=(f'_x)'_x=\mathrm{e}^{-y}(f'_u)'_x=\mathrm{e}^{-y}f''_{uu}u'_x+f''_{uv}v'_x=\underline{\mathrm{e}^{-2y}f''_{uu}}$$

$$\underline{f''_{xy}}=(f'_x)'_y=(\mathrm{e}^{-y}f'_u)'_y=-\mathrm{e}^{-y}f'_u+\mathrm{e}^{-y}\left(f''_{uu}u'_y+f''_{uv}v'_y\right)=-\mathrm{e}^{-y}f'_u+\mathrm{e}^{-y}(-x\mathrm{e}^{-y}f''_{uu}+f''_{uv})=$$

$$=\underline{-\mathrm{e}^{-y}f'_u-x\mathrm{e}^{-2y}f''_{uu}+\mathrm{e}^{-y}f''_{uv}}$$

Insättes i differentialekvationen:

$$x\mathrm{e}^{-2y}f''_{uu}-\mathrm{e}^{-y}f'_u-x\mathrm{e}^{-2y}f''_{uu}+\mathrm{e}^{-y}f''_{uv}+\mathrm{e}^{-y}f'_u=\mathrm{e}^{-y}f''_{uv}\overset{!}{=}x\mathrm{e}^{-2y}$$

$$f''_{uv}=x\mathrm{e}^{-y}=u$$

$$\left(f'_u\right)'_v=u \Longrightarrow f'_u=uv+g(u) \Longrightarrow f(u,v)=\frac{1}{2}u^2v+G(u)+h(v)$$

$$\underline{\textbf{Svar:}}\quad f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y\mathrm{e}^{-2y}+G(x\mathrm{e}^{-y})+h(y)=f(x,y)$$

2.61b) Utveckla $f(x,y)=(x+1)^{y+1}$ till och med ordning 2.

Lösning:

$$f(x,y)=(x+1)(x+1)^y=(x+1)\mathrm{e}^{y\ln(x+1)}=$$

$$=(x+1)(1+y\ln(x+1)+B_5(x,y))=(x+1)(1+y(x+\text{rest})+\text{rest})=$$

$$=1+x+x\,y+\text{högre termer}$$

||.

Med $h=\Delta x$ och $k=\Delta y$:

$f(x,\ y)\ -\ f(a,\ b)\ =\ f'_x(a,\ b)h\ +\ f'_y(a,\ b)k\ +\ \frac{1}{2}\big(f''_{xx}(a,\ b)h^2\ +\ 2f''_{xy}(a,\ b)hk\ +\ f''_{yy}(a,\ b)k^2\big)\ +\ \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3 B(\ldots)$

Om (a,b) är stationär:

$$f(x,y)-f(a,b)=\frac{1}{2}\big(f''_{xx}(a,b)h^2+2f''_{xy}(a,b)hk+f''_{yy}(a,b)k^2\big)+(\sqrt{\cdots})^3B(\ldots)$$

Denna term avgör om det är max eller min. *Quadratic form:*

$$Q(h,k)=Ah^2+2Bhk+Ck^2$$

DEFINITION: En avbilding $\begin{array}{c} Q\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ (h,k)\mapsto Ah^2+2Bhk+Ck^2 \end{array}$ kallas **kvadratisk form**.

$$Q(h,k)=\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

|||.

Analogt i flera variabler:

$$\mathbb{R}^3\colon\quad Q(h,k,l)=\begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$$

DEFINITION: En kvadratisk form Q kallas **positivt definit** om $Q(h,\,k)>0$ för alla $(h,\,k)\neq 0$. Den kallas **negativt definit** om $Q(h,k)<0$ för alla $(h,k)\neq(0,0)$. Den kallas **indefinit** om Q antar positiva *och* negativa värden. Positivt/negativt **semidefinit** om olikheterna inte gäller strängt och $Q(h,k)=0$ för något (h,k).

|||.

Exempel:

2.64 $Q(h,k)=h^2+k^2$ är positivt definit, $Q(h,k)=-h^2-k^2$ är negativt definit, $Q(h,k)=h^2-k^2$ är indefinit, $Q(h,k)=hk$.

$$Q(h,k)=h^2+k^2+2hk=(h+k)^2\colon\quad \text{positivt semidefinit}$$

$$Q(h,k)=h^2+k^2+hk=\left(h+\frac{1}{2}k\right)^2+\frac{3}{4}k^2\colon\quad \text{poisitivt definit}$$

$$Q(k,k)=h^2+k^2+4hk=(h+2k)^2-3k^2\colon\quad \text{indefinit}$$