Övning 2006–01–18

2.1e)

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2)$$

$$f'_x = \frac{2}{2} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$f'_y = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

2.2b)

$$f(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}| = r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$f'_{x_k} = \frac{2}{2} \frac{x_k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \qquad k \in \{1, 2, 3\}$$

2.11 Bestäm tangentplanet i punkten $(1, 1, 5)$ till paraboloiden $z = x^2 + 4y^2$.

(Kollar att punkten ligger på ytan.)

$$z = f(1, 1) + f'_x(1, 1)(x - 1) + f'_y(1, 1)(y - 1)$$

$$f'_x = 2x \qquad f'_y = 8y$$

$$z = 5 + 2(x - 1) + 8(y - 1)$$

$$2x + 8y - z = 5$$

Repetition $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är differentierbar i (a, b) om

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \frac{f(x, y) - (f'_x(a, b)\Delta x + f'_y(a, b)\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0$$

8b) $f(x, y) = (1 + x + 2y)^2$, $(a, b) = (1, -1)$

f är differentierbar (i varje punkt) ty de partiella derivatorna:

$$f'_x = 2(1 + x + 2y)$$

$$f'_y = 4(1 + x + 2y)$$

är båda kontinuerliga.

Direkt bevis för $(1, -1)$:

$$f'_x(1, -1) = 0$$

$$f'_y(1, -1) = 0$$

$\Delta x = x - 1,\ \Delta y = y + 1$:

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \frac{f(x,y) - (0 + 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{(\Delta x + 2 + 2\Delta y - 2)^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \rho(\Delta x, \Delta y) = \lim_{r \to 0} \rho(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \lim_{r \to 0} \frac{r^2(\cos\varphi + 2\sin\varphi)^2}{r} = 0$$

Vilket skulle bevisas. Eller om man så vill:

$$f(x,y) = f(1 + \Delta x, -1 + \Delta y) = f(1,-1) + f_x'(1,-1)\Delta x + f_y'(1,-1)\Delta y + \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\,\rho(x,y)$$

$$\rho(x,y) = \frac{f(1 + \Delta x, -1 + \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{(1 + (1 + \Delta x) + 2(-1 + \Delta y))^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

25a) Lös differentialekvationen (sök $f(x, y)$ så att) $y\, f_x' - x\, f_y' = x\, y\, f$. $x > 0$, $y > 0$. Ledning: inför

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}$$

Då blir

$$f_x' = f_u'\, u_x' + f_v'\, v_x' = 2x\, f_u' - x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, f_v'$$

$$f_y' = f_u'\, u_y' + f_v'\, v_y' = 2y\, f_u' + 0\, f_v'$$

Sätt in i differentialekvationen:

$$\mathrm{VL} = y\, f_x' - x\, f_y' = 0 - y\, x\, v\, f_v' \overset{!}{=} x\, y\, f = \mathrm{HL}$$

$$-v\, f_v' = f \text{ eller } v f_v' + f = 0$$

Separabel, eller bättre: integrerande faktor.

$$(v\, f)_v' = 0$$

$v\, f =$ konstant med avseende på v, beror inte på v: godtycklig deriverbar funktion av u

<u>Svar:</u> $f(u,v) = \frac{1}{v} g(u)$, i (x,y): $f(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} g(x^2 + y^2)$.

b) $f(0,y) = g(y^2) \overset{!}{=} y^2$ ger $g(t) = t$, alltså

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}(x^2 + y^2)$$