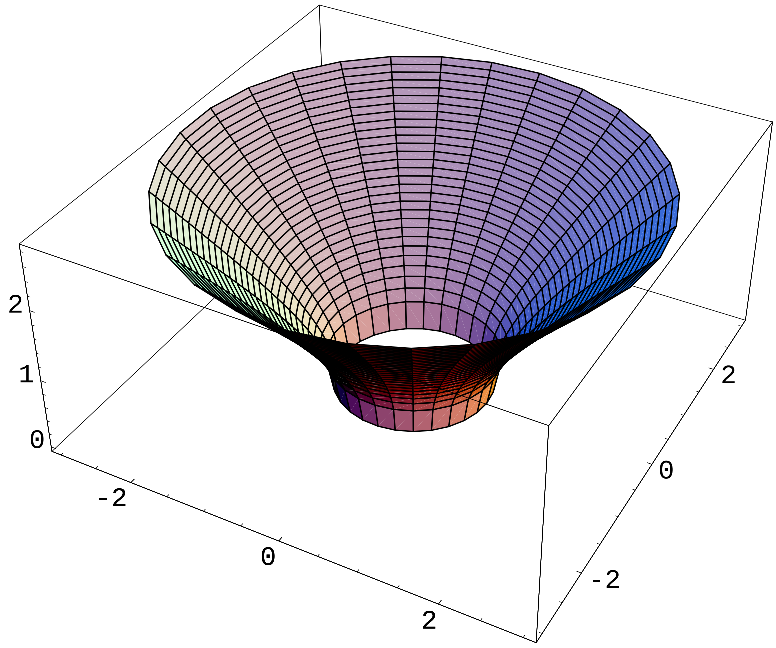
2006–03–01

4.44 Vilka värden antar $f(x,y,z) = x + y + z$ då $(x,y,z) \in Y : z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 3$

Y:



$D = \{(x,y) : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 3\}$.

Lösning: bestäm max/min av $u(x,y) = x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ då $(x,y) \in D$.

Inre punkter

$$\begin{cases} f'_x = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} = 0 \\ f'_y = 1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} = 0 \end{cases}$$

$$x = y$$

alltså: $f'_x = 0$ ger

$$x = -\sqrt{2x^2 - 1} < 0$$

$$x^2 = 2x^2 - 1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = -1 < 0$$

En kandidat: $\mathbf{(-1, -1)}$.

Randpunkter

Rand 1: $x^2 + y^2 = 1$. Bestäm max/min av $h(x,y) = x + y$ under bivillkoret $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Lagrange:

$$\operatorname{grad} g = (2x, 2y) \neq 0 \quad \text{på rand 1}$$

Alltså löser extrempunkter problemet:

$$\begin{cases} h'_x = \lambda_0\, g'_x \\ h'_y = \lambda_0\, g'_y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda_0\, 2x \\ 1 = \lambda_0\, 2y \end{cases} \Longrightarrow x = y$$

ur bivillkoret fås $2x^2 = 1$, dvs $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Två kandidater: $\pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

<u>Rand 2</u>: $x^2 + y^2 = 3$: bestäm max/min av $h(x, y) = x + y + \sqrt{2}$ under bivillkoret $g(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0$. Lagrange:

$$\begin{cases} 1 = \lambda_0\, 2x \\ 1 = \lambda_0\, 2y \end{cases} \Longrightarrow x = y$$

Ur bivillkoret fås då $2x^2 = 3$, dvs $x = y = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Två kandidater: $\pm \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$.

—

u är kontinuerlig, D kompakt $\Rightarrow u$ antar max/min på D, finns bland:

$$\begin{cases} u(-1, -1) = -1 \\ u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \\ u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\sqrt{2} \\ u\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right) = \sqrt{6} + \sqrt{2} \\ u\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}} \right) = -\sqrt{6} + 2 \end{cases}$$

max$= \sqrt{6} + \sqrt{2}$, min $= -\sqrt{2}$.

Svar: f kontinuerlig, Y är bågvis sammanhängande: f antar alla värden mellan $-\sqrt{2}$ och $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.

5.1 **Viktiga** funktioner (i fysik) som ges av en integral:

$$\left[\operatorname{erf} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \right.$$

$$\left. \operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \right]$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$$

Laplace-transform:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$

Fourier-transform:

$$\hat{f}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Frågan: Får man derivera “under integralen”.

SATS:

Förutsättningar:

- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (s,x) \mapsto f(s,x)$
- f och f_s' är kontinuerliga på

$$\begin{array}{c} \alpha < s < \beta \\ a < x < b \end{array}$$

  α, a får vara $-\infty$; β, b får vara ∞

- Till varje $[\alpha_1,\ \beta_1] \subset\ ]\alpha,\ \beta[$ finns en funktion $g(x)$: $|f_s'(s,\ x)| \leqslant g(x)$ för $s \in [\alpha_1,\ \beta_1]$ och $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ är konvergent (dvs det finns en av s oberoende majorant med konvergent integral $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$).

Påstående:

$$F(s) = \int_a^b f(s,x)\mathrm{d}x$$

F är deriverbar med ($s \in\ ]\alpha, \beta[$):

$$F'(s) = \int_a^b f_s'(s,x)\,\mathrm{d}x$$

Bevis. Visa att

$$\frac{F(s+h)-F(s)}{h} \to \int_a^b f_s'(s,x)\mathrm{d}x$$

Det fås med “f_s' är likformigt kontinuerlig på ett kompakt intervall $[\alpha_1, \beta_1]$”. □

ANMÄRKNING 1

Om $|a| < \infty$, $|b| < \infty$: (ingen generaliserad integral, ingen majorant behövs)

ANMÄRKNING 2

$$F(s) = \int_{h(s)}^{g(s)} f(s,x)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow F'(s) = \int_{h(s)}^{g(s)} f_s'(s,x)\mathrm{d}x + f(s, g(s))g_s' - f(s, h(s))h_s'$$

EXEMPEL

$(s > 0)$

$$F(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Detta är Laplacetransformen av Heavisides språngfunktion.

$$-\frac{1}{s^2}=F'(s)=\int_0^\infty(-t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

ty

$$f(s,t)=\mathrm{e}^{-st}$$

$$f_s'(s,t)=-t\,\mathrm{e}^{-st}$$

kontinuerliga i $0<s, 0<t$ och för $[\alpha_1,\beta_1]\subset]0,\infty[$ är $|f_s'(s,t)|=t\,\mathrm{e}^{-st}<t\mathrm{e}^{-\alpha t}=g(t)$:

$$\int_0^\infty g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{är konvergent}$$

$$\frac{2}{s^3}=F''(s)=\int_0^\infty(-t)^2\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \quad [\text{på samma sätt}]$$

$$(-1)^n\cdot\frac{n!}{s^{n+1}}=F^{(n)}(s)=\int_0^\infty(-t)^n\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

ö5.9 Beräkna

$$F(s)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-sx}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x, s>0$$

Lösning:

$$f(s,x)=\frac{\mathrm{e}^{-sx}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}$$

är $\mathcal{C}^\infty$ i $0<s, 0<x$ (Maclaurin).

$$f_s'(s,x)=-\mathrm{e}^{-sx}$$

$|f_s'(s,x)|\leqslant\mathrm{e}^{-\alpha s}$ för $s\in[\alpha_1,\beta_1]\subset]0,\infty[$.

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x \quad \text{är konvergent, alltså}$$

$$F'(s)=\int_0^\infty(-\mathrm{e}^{-sx})\mathrm{d}x=\frac{1}{s}[\mathrm{e}^{-sx}]_0^\infty=\frac{1}{s}$$

$$\Longrightarrow F(s)=\ln s+c$$

$$F(2)=0\Longrightarrow c=-\ln 2$$

$$F(s)=\ln\frac{s}{2}$$

Gammal tenta: 2005–03–14

1. $f(x,y)$ satisfierar

$$2x\,f_x'+2y\,f_y'=0, (x>0, y>0)$$

Påstående: f konstant på kurvan $C\colon \boldsymbol{r}=(x(t),y(t))=(t^2,t^3)$, $t>0$.

Bevis. $h(t)=f(x(t),y(t))$ har derivatan $h'(t)=f'_x\cdot x'(t)+f'_y\cdot y'(t)=2t\cdot f'_x+3t^2\cdot f'_y$.

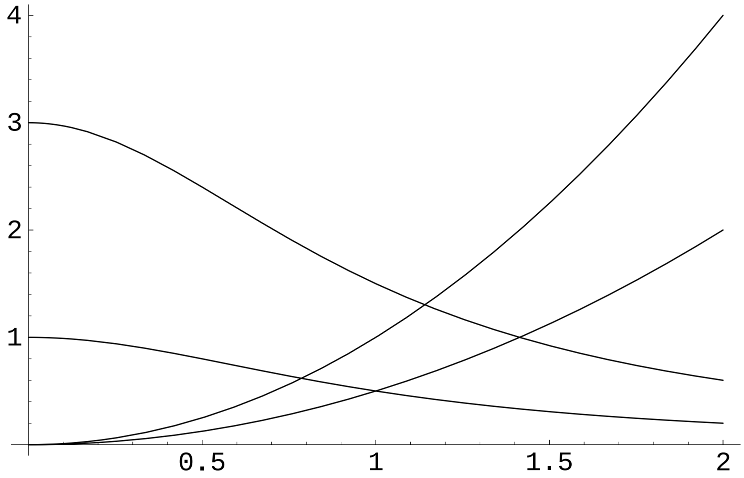
$$h'(t)=\frac{1}{t}\big(2t^2 f'_x+3t^3 f'_y\big)=\frac{1}{t}\big(2x\, f'_x+3\,y\, f'_y\big)=\frac{1}{t}(0)=0$$

$h'=0\Rightarrow h$ konstant. □

2. Beräkna

$$\iint_D \frac{\left(2x^4+3\,x^2+1\right)\,y^2}{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

där D begränsas av $y=\frac{1}{1+x^2}$, $x=\frac{3}{1+x^2}$, $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{2}$:



Inför

$$\begin{cases} u=y(1+x^2)\\ v=\frac{x^2}{y}\end{cases}$$

Nytt område:

$$D'\colon\begin{cases} 1\leqslant u\leqslant 3\\ 1\leqslant v\leqslant 2\end{cases}$$

$$\iint_D \frac{\left(2x^4+3\,x^2+1\right)\,y^2}{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'} \frac{\left(2x^4+3\,x^2+1\right)\,y^2}{x^3}\cdot\left|\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)}=\begin{vmatrix} 2\,x\,y & 1+x^2\\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2}\end{vmatrix}=-\frac{2\,x^3}{y}-\frac{2\,x\left(1+x^2\right)}{y}\right]$$

Skilt från noll, u,v duger.

$$=\int_{u=1}^{3}\int_{v=1}^{2}\left(\frac{\left(2\,x^2+1\right)\left(x^2+1\right)}{v(2x^2+1)\cdot 2}\cdot\frac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{u=1}^{3}\int_{v=1}^{2}\frac{u}{v^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left[\frac{v^2}{2}\right]_1^3\left[-\frac{1}{v}\right]_1^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{2}\cdot\frac{1}{2}=1$$

Måhända hade saker blivit enklare med $v=\frac{y}{x^2}$ och $\frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 1$.
Nästa gång:
max/min av $(x-2)^2+y^2+(x+2)^2+(y-2)^2$ under bivillkor $g(x,y)=x^2+\frac{y^2}{4}-1=0$