2006–02–27

$\longrightarrow$ sök max/min av f under bivillkor.

[ofta kan man inte ens lösa ut $z = \ldots$ ur bivillkoret]

Då finns följande metod (OBSERVERA: det ger bara ett *nödvändigt* villkor: "om f antar max/min ... så ...", om punkten ger max/min eller ingetdera måste man avgöra i varje enskilt fall.)

SATS: (Lagranges multiplikationsmetod, 1797: *Theorie des fonctions analytiques*)

Förutsättningar:

- $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ i en omgivning U till $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. ($\boldsymbol{a}$ inre punkt)

- f antar i $\boldsymbol{a}$ ett (lokalt) extremvärde under bivillkoret $g(\boldsymbol{x}) = 0$. [Det finns en omgivning U_1 till $\boldsymbol{a}$, $U_1 \subseteq U$ så att $f(\boldsymbol{x}) \lesseqgtr f(\boldsymbol{a})$ för alla $\boldsymbol{x} \in U_1 \cap \{\boldsymbol{x}\colon g(\boldsymbol{x}) = 0\}$.]

Påstående grad $f(\boldsymbol{a}) \parallel$ grad $g(\boldsymbol{a})$, dvs antingen är grad $g(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ eller så finns λ_0 så att

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \lambda_0 \cdot \operatorname{grad} g(\boldsymbol{a})$$

ANMÄRKNING: sätt $\Phi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \mapsto \Phi(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda g(\boldsymbol{x})$, satsen säger $\exists \lambda_0$ så att $(\boldsymbol{a}, \lambda_0)$ är en stationär punkt till Φ. Faktorn λ kallas Lagrange-multiplikator.

Bevis. för $n = 2$.

f, g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (a, b) lokal extrempunkt till f under bivillkoret $g = 0$. Om grad $g(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}$ säger implicita funktionssatsen att nivåkurvan C: $g = 0$ lokalt kring (a, b) är en $\mathcal{C}^1$-funktionskurva ($y = y(x)$ eller $x = x(y)$), parameterisera $C\colon \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$, $\alpha \xrightarrow{t} \beta$, $(a, b) = \boldsymbol{r}(t_0)$, $\alpha < t_0 < \beta$: då vet vi: $h(t) = f(x(t), y(t))$ har ett (lokalt) extremvärde i t_0 alltså $h'(t_0) = 0 =$ grad $f(a, b) \cdot (x'(t_0), y'(t_0))$, dvs grad $f(a, b) \perp \boldsymbol{r}'(t_0) =$ tangentvektor i (a, b), dvs grad $f(a, b) \|$grad $g(a, b)$, ty grad $g \perp$tangentvektorn. □

Väldigt åskådligt ⟨fig55⟩.

För $n = 3$: grad $f(\boldsymbol{a}) \perp$ varje kurva genom $\boldsymbol{a}$ i nivåytan $g \equiv 0$, dvs vinkelrät mot tangentplanet. grad $f(\boldsymbol{a}) \|$grad $g(\boldsymbol{a})$.

EXEMPEL 3 och EXEMPEL 4.

3 Sök max/min av $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2\, z^2$ under bivillkoret $g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$

Lösning nu med Lagrange:

$$\operatorname{grad} g = (1, 1, 1) \neq \boldsymbol{0}$$

alltså satisfierar extrempunkten grad $f = \lambda_0$ grad g:

$$\begin{cases} f'_x = \lambda_0\, g'_x \\ f'_y = \lambda_0\, g'_y \\ f'_z = \lambda_0\, g'_z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\, x = \lambda_0 \\ 2\, y = \lambda_0 \\ 4\, z = \lambda_0 \end{cases} \Longrightarrow x = y = 2\, z$$

(λ_0 är egentligen inte intressant och elimineras i regel först ur systemet).

Ur bivillkoret fås $2\,z+2\,z+z=1 \Longrightarrow z=\frac{1}{5}$, enda kandidaten är $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$. Är detta max? Min?

"ser": $f(x,y,z)\to\infty$ då $x^2+y^2+z^2\to\infty$, dvs $f\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}$. $f(x,y,z)>\frac{2}{5}$ utanför K: $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$. På den kompakta mängden (cirkelskivan) $K\cap\pi$ med π: $x+y+z=1$: alltså antar f max/min $\Longrightarrow f\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}$ är min, ty t.ex. $f(1,0,0)=1>\frac{2}{5}$, dvs max på K är $>\frac{2}{5}$.

Exempel 4

Sök max/min av $f(x,y,z)=x+y+z$ under bivillkoret $g(x,y,z)=x^2+y^2+2\,z^2-1$, ellips E: $g(x,y,z)=0$.

Lösning med Lagrange:

$$\operatorname{grad} g=(2x,2y,4z)$$

$\operatorname{grad} g=\mathbf{0} \Longleftrightarrow x=y=z=0$, men $g(0,0,0)\neq 0$. Alltså löser extrempunkterna:

$$\begin{cases} f_x'=\lambda_0\,g_x' \\ f_y'=\lambda_0\,g_y' \\ f_z'=\lambda_0\,g_z' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1=\lambda_0\cdot 2x \\ 1=\lambda_0\cdot 2y \\ 1=\lambda_0\cdot 4z \end{cases} \Longrightarrow \left[\frac{1}{2\lambda_0}=\ldots\right] \quad x=y=2z$$

Ur bivillkoret fås då $4\,z^2+4\,z^2+2\,z^2=1$, dvs $z=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ och kandidater:

$$\pm\left(\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

E är kompakt och f är kontinuerlig $\Longrightarrow f$ antar på E max/min, måste finnas bland:

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$f\left(\frac{-2}{\sqrt{10}},\frac{-2}{\sqrt{10}},\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)=-\frac{5}{\sqrt{10}}$$

Övning 4.25 Sök max/min av $f(x,y)=x^2+y^2$ (avstånd till/från origo)^2, under bivillkoret $g(x,y)=13\,x^2+13\,y^2+10\,x\,y-72=0$.

Lösning med Lagrange:

$$\operatorname{grad} g=(26\,x+10\,y,26\,y+10\,x)=0 \Longleftrightarrow (x,y)=(0,0)$$

och $g(0,0)\neq 0$, alltså löser extrempunkterna ekvationssystemet:

$$\begin{cases} f_x'=\lambda_0\,g_x' \\ f_y'=\lambda_0\,g_y' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} I: \quad 2\,x=\lambda_0\,(26\,x+10y) \\ II: \quad 2\,y=\lambda_0\,(26\,y+10x) \end{cases}$$

Subtrahera, eller: $I\cdot y-II\cdot x$:

$$0=0+\lambda_0\left(10\,y^2-10x^2\right)$$

$$\Longrightarrow y^2-x^2=(y+x)(y-x)=0$$

Fall 1: $y=x$: ur bivillkoret fås $36\,x^2=72$. Kandidater $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ och $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$.

Fall 2: $y = -x$: ur bivillkoret fås $16\,x^2 = 72$. Kandidater $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ och $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

$g = 0$ är en kompakt mängd (enkel, kontinuerlig kurva C), alltså antar f på C max/min bland $f(\pm\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)) = 4$ och $f(\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)) = 9$, dvs största avstånd är tre och minsta avstånd är tre. ⟨fig56⟩.

Anmärkning: Fler bivillkor: t.ex. $n = 3$:

$$f, g, h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

f antar i $\boldsymbol{a}$ ett (lokalt) extremvärde under bivillkoren $g(x, y, z) = 0$ och $h(x, y, z) = 0$.

Då gäller: Antingen är grad $g(\boldsymbol{a}) \|$grad $h(\boldsymbol{a})$ eller grad $f(\boldsymbol{a})$, grad $g(\boldsymbol{a})$ och grad $h(\boldsymbol{a})$ ligger i ett plan (är "linjärt beroende"), dvs det finns λ_0, μ_0 så att

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \lambda_0 \operatorname{grad} g(\boldsymbol{a}) + \mu_0 \operatorname{grad} h(\boldsymbol{a})$$

Övning 4.32 Sök max/min av $f(x, y, z) = x + y + z$ under bivillkoren $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$ och $h(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$.

Lösning med Lagrange:

$$\operatorname{grad} g = (2x, 2y, 2z) \nparallel \operatorname{grad} h = (2x, 2y, -1) \quad \text{ty } z > 0$$

alltså löser extrempunkterna ekvationssystemet:

$$\begin{cases} f'_x = \lambda_0\, g'_x + \mu_0\, h'_x \\ f'_y = \lambda_0\, g'_y + \mu_0\, h'_y \\ f'_z = \lambda_0\, g'_z + \mu_0\, h'_z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda_0 \cdot 2x + \mu_0 \cdot 2x \\ 1 = \lambda_0 \cdot 2y + \mu_0 \cdot 2y \\ 1 = \lambda_0 \cdot 2z - \mu_0 \end{cases}$$

$\lambda_0 = 0$: ingen lösning, $\mu_0 = 0$: ingen lösning (Do It)

$\lambda_0\, \mu_0 \neq 0$: subtraktion ger (...) $x = y$ och så vidare: bivillkor $2 - z^2 = z \Longleftrightarrow z^2 + z - 2 = (z + 2)(z - 1) = 0$ ger $z = 1$, eftersom $z > 0$.

$$2\,x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = y$$

Kandidater:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$$

f är kontinuerlig, skärningskurvan $(g = 0) \cap (h = 0)$ [cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ i planet $z = 1$] är kompakt: funktionen antar max/min: $\sqrt{2} + 1$ resp. $-\sqrt{2} + 1$