2006–02–23

SLUTANMÄRKNING (magnetfält $\boldsymbol{B}$, elektriskt fält $\boldsymbol{E}$: kring z-axeln, för enkelhetens skull

$$\boldsymbol{B}_1=\frac{1}{r^2}(-y,x)\perp\boldsymbol{E}=\frac{1}{r^2}(x,y)\quad \text{med}\, r^2=\sqrt{x^2+y^2}$$

I $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\text{rot}\,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0},\quad \text{div}\,\boldsymbol{B}=0,\quad \boldsymbol{B}\,\text{konservativ i t.ex. } x>0\ \left(\Phi(x,y)=\arctan\frac{y}{x}\right)$$

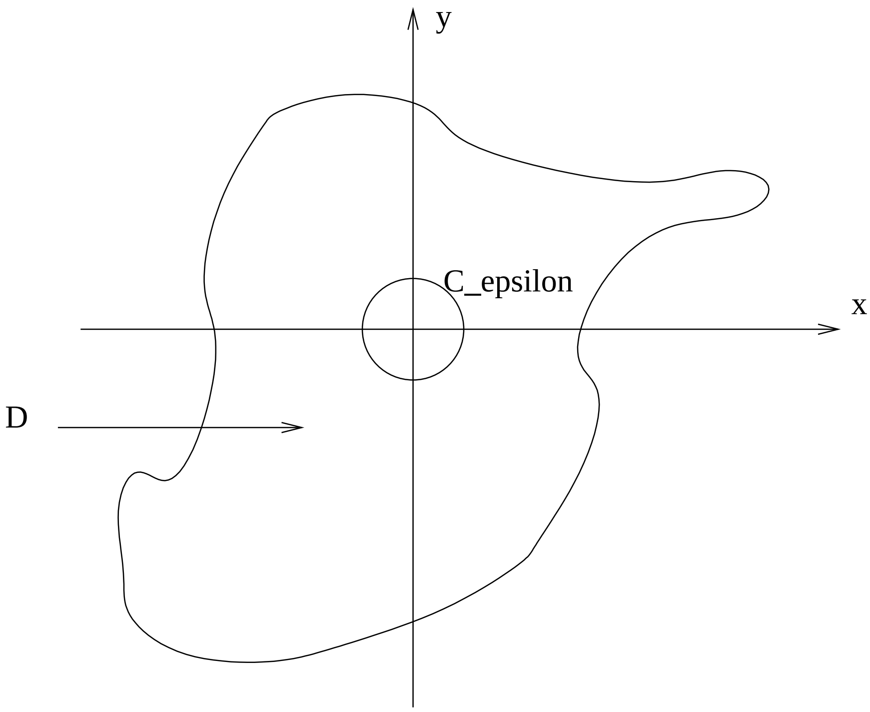
$$\text{rot}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0},\quad \text{div}\boldsymbol{E}=0,\quad \boldsymbol{E}\text{ konservativ i }\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\quad \left(\Phi(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln r\right)$$

$$\int_{\partial D}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\begin{cases}0, & (0,0)\in D\\ 2\pi, & (0,0)\ \text{inre punkt i } D\end{cases}$$

Men:

$$\int_{\partial D}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=0\quad \left(\text{dvs}\int_{\gamma}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\ \text{ för varje sluten kurva med } (0,0)\notin\gamma\right)$$

Bevis. Tar en cirkel C_ε med ε så litet att cirkeln $C_\varepsilon\subset D$:



$$\int_{\gamma=\partial D}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{-C_\varepsilon}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\begin{bmatrix}x=\varepsilon\cos\varphi,\ \mathrm{d}x=-\varepsilon\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ y=\varepsilon\sin\varphi,\quad \mathrm{d}y=\varepsilon\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\end{bmatrix}=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\varepsilon(\cos\varphi)(-\varepsilon\sin\varphi)}{\varepsilon^2}+\frac{\varepsilon\,(\sin\varphi)(\varepsilon\cos\varphi)}{\varepsilon^2}\right)\mathrm{d}\varphi=0$$

$\square$

Vektorpotential ej entydigt bestämd: Om $\boldsymbol{v} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ så är $\boldsymbol{v} = \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{F})$ för varje konservativt fält $\boldsymbol{F}$. ($\boldsymbol{F} = \mathrm{grad}\,\Phi$, $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\Phi = 0$)

Tillbaka till kapitel 4

Problemet: "Bestäm det största (minsta) värde som en funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ antar på en mängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ", eventuellt under bivillkor.

Till hjälp har vi:

1. Om f är kontinuerlig på D, där D är kompakt, så **antar** f ett största och ett minsta värde värde på D.

2. Om f antar i en inre punkt $\boldsymbol{a}$ ett max/min och är partiellt deriverbar i $\boldsymbol{a}$, så är $\boldsymbol{a}$ stationär ($\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{a}) = 0$).

Extrempunkter finns bland:

1. Inre punkter som är stationära.

   Inre punkter i vilka f ej är partiellt deriverbar.

2. Randpunkter.

EXEMPEL:

Typexempel 1 Bestäme största/minsta värde som en funktion

$$f(x, y) = x + x^2 + y^2$$

antar på $D\colon x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Lösning: <fig52>

1. Inre punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 1 + 2x = 0 \\ f'_y = 2y = 0 \end{cases}$$

Den enda lösningen vi hittade är $x = -\frac{1}{2}$ och $y = 0$. Den ligger i D: vi har hittat en inre, stationär punkt i D.

2. Randpunkter: ("Börja med inre punkter, börja inte med randen")

På randen ($\partial D\colon x^2 + y^2 = 1$) är $f(x, y) = x + 1$. Är $\begin{matrix}\text{minst}\\ \text{störst}\end{matrix}$ då $\begin{matrix} x = -1 \\ x = +1 \end{matrix}$.

Alltså i $(-1, 0)$ respektive $(1, 0)$.

3. Slutplädering: f är kontinuerlig, D är kompakt, alltså antar f max och min på D. Max/min finns bland:

$$f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$
$$f(-1, 0) = 0$$
$$f(1, 0) = 2$$

Svar: Största värde är 2, minsta värde är $-\frac{1}{4}$.

Typexempel 2 Man vill tillverka en låda utan lock i form av ett rätblock med jämntjocka sidor med volymen 1 m^3. Bestäm lådans mått då materialåtgången är minst ("billigaste lådan").

$$\text{Arean} = x\,y + 2\,x\,z + 2\,y\,z$$

$$\text{Volymen} = x\,y\,z = 1$$

Sök minsta (största) värdet som $f(x,\,y) = x\,y + 2\,z(x + y)\,\frac{1}{x\,y} = x\,y + \frac{2}{y} + \frac{2}{x}$ antar då $x > 0$ och $y > 0$. (Definitionsmängden är ej kompakt!)

Lösning:

Statinära punkter:

$$\begin{cases} f_x' = y - \frac{2}{x^2} = 0 \\ f_y' = x - \frac{2}{y^2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow y\,x^2 = x\,y^2 \Longleftrightarrow x = y \quad (x\,y \neq 0)$$

$(f_x' = 0)$, $x^3 = 2$, dvs enda stationära punkten är $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$, max, min, ingetdera?

Värdet $f(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4} + 4\,\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 3\,\sqrt[3]{4} < 6$

Ser: $f(x,\,y) \to \infty$ då $r^2 = x^2 + y^2 \to \infty$. f saknar max. Vidare: $f(x,\,y) = x\,y + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} > 6$ då $x \leqslant \frac{1}{3}$ och då $y \leqslant \frac{1}{3}$ och då $x\,y > 6$. <fig53>

f är kontinuerlig på D, D kompakt $\Longrightarrow f$ antar max/min på D, måste göra det i $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ eller på randen ∂D. Men på randen ∂D och hela området utanför är $f(x,\,y) > 6$, alltså är $f(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ f:s minsta värde (på D, och även på hela $x > 0$, $y > 0$), alltså

$$x = \sqrt[3]{2}, \quad y = \sqrt[3]{2}, \quad z = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

ger billigaste lådan. (Helt fel vore att bestämma karaktären "lokal min" av punkten.)

Sök det största/minsta värde som f antar "under bivillkoret $g = 0$".

Exempel på bivillkor:

i $\mathbb{R}^2$: sök max/min av $f(x,\,y)$ då $g(x,\,y) = 0$, dvs då $(x,\,y)$ ligger på (nivå)kurvan $g(x,\,y) = 0$.

i $\mathbb{R}^3$: sök max/min av $f(x,\,y,\,z)$ då $g(x,\,y,\,z) = 0$, dvs då $(x,\,y,\,z)$ ligger på (nivå)ytan $g(x,\,y,\,z) = 0$; eller: då $g(x,\,y,\,z) = 0$ och $h(x,\,y,\,z) = 0$: $(x,\,y,\,z)$ ligger på skärningskurvan mellan $g = 0$ och $h = 0$.

Typexempel 3

Sök det största/minsta värde som $f(x,\,y,\,z) = x^2 + y^2 + 2\,z^2$ antar under bivillkoret $g(x,\,y,\,z) = x + y + z - 1 = 0$.

Geometriskt: sök största/minsta ellipsoid E: $x^2 + y^2 + 2\,z^2 = K$ (K ger max eller min) som träffar planet π.

Lösning: Lös ut z ur bivillkoret: $z = 1 - x - y$, sök sedan max/min av $u(x,\,y) = x^2 + y^2 + 2(1 - x - y)^2$.

$$\begin{cases} u_x' = 2\,x - 4(1 - x - y) = 0 \\ u_y' = 2\,y - 4(1 - x - y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = y$$

$u'_x = 0$:

$$2\,x - 4(1 - 2\,x) = 0 \Longrightarrow 10x = 4 \Longrightarrow x = \frac{2}{5}$$

En enda stationär punkt $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$.

$$u\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{8}{25} + 2 \cdot \frac{1}{25} = \frac{2}{5}$$

"Ser" $u(x, y) = x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2 > \frac{2}{5}$ då $x^2 + y^2 \geqslant 2$. På kompakta mängden D: $x^2 + y^2 \leqslant 2$ antar u max/min, gör det i $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ eller på randen ∂D, alltså är $u(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ u:s minsta värde (ty på ∂D och utanför D är $u(x, y) > \frac{2}{5}$).

Svar: max saknas. Min: $f(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}) = u(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}) = \frac{2}{5}$.

Typexempel 4

Sök det största/minsta värde som $f(x, y, z) = x + y + z$ antar under bivillkoret $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 1 = 0$.

Sök det plan π: $x + y + z = K$ längst bort från/närmast origo som träffar ellipsoiden $x^2 + y^2 + 2\,z^2 = 1$. <fig54>

(Lättast med Lagranges multiplikatormetod, det gör vi på måndag.)