2006–02–22

Huvudresulatat (fortsättning: i $\mathbb{R}^3$)

Sats: $\boldsymbol{v}$ är $\mathcal{C}^1$ i $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, Ω öppen.

	Krav på Ω	
1	inget	$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\Phi$ i $\Omega \Longrightarrow \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ i Ω [gradientfält är virvelfria]
2	enkelt sammanhängande	$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ i $\Omega \Longrightarrow \int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen i Ω
3	bågvis sammanhängande	$\int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ oberoende av vägen i $\Omega \Longrightarrow \boldsymbol{v}$ har en potential i Ω
4	inget	$\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ i $\Omega \Longrightarrow \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ i Ω [vektorfält är källfria]
5	konvex	$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ i $\Omega \Longrightarrow \boldsymbol{v}$ har en vektorpotential i Ω.

Om $\boldsymbol{v}$ är $\mathcal{C}^1$ i en konvex mängd Ω:

$$\boxed{\begin{array}{c}\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\Phi \Longleftrightarrow \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A} \Longleftrightarrow \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0\end{array}}$$

$\boldsymbol{v}$ är virvelfritt och källfritt $\Longleftrightarrow \Phi$ är harmonisk, dvs $\Delta\Phi = \Phi''_{xx} + \Phi''_{yy} + \Phi''_{zz} = 0$

Bevis.

1 gjort.

2. Stokes ger:

$$\int_{\gamma,\, \gamma = \partial Y} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \pm \iint_Y \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 0$$

för varje sluten kurva $\gamma \subseteq \Omega$, vilket innebär att kurvintegralen mellan två bestämda punkter är oberoende av vägen för alla kurvor i Ω.

3. Visat tidigare: Om

$$\int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \text{är oberoende av vägen så är } \Phi(x,y,z) = \int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \text{en potential till } \boldsymbol{v}$$

där $(a,b,c) \in \Omega$, dvs $\nabla\Phi = \boldsymbol{v}$.

4. gjort

[5. Om $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \operatorname{div}(X,Y,Z) = X'_x + Y'_y + Z'_z = 0$ så fås en vektorpotential till exempel så här:

Välj $\boldsymbol{A} = (A, B, 0)$, då är systemet $\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}$ lösbart; systemet:

$$\begin{cases} X = -B'_z \\ Y = A'_z \\ Z = B'_x - A'_y \end{cases}$$

ta

$$B(x,y,z) = -\int_c^z X(x,y,t)\,\mathrm{d}t$$

$$A(x,y,z) = \int_c^z Y(x,y,t)\mathrm{d}t - \int_b^y Z(x,t,c)\,\mathrm{d}t$$

då är $B'_x - A'_y = Z$:

$$B'_x - A'_y = [\text{här behövs } 5.1] =$$

$$= -\int_c^x X'_x(x,y,t)\,\mathrm{d}t - \int_c^z Y'_y(x,y,t)\,\mathrm{d}t + Z(x,y,c) =$$

$$= [X'_x + Y'_y = -Z'_z] = \int_c^z Z'_z(x,y,t)\mathrm{d}t + Z(x,y,c) = Z(x,y,z) \qquad \square$$

Om $\boldsymbol{v} = \nabla\Phi$ så är

$$\nabla\boldsymbol{v} = \nabla\cdot\nabla\Phi = \Delta\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi$$

Huvudexempel 1

Kraftfält $\boldsymbol{F}$ riktat mot (eller från) origo; styrkan $|\boldsymbol{F}|$ är proportionell mot en potens n av r, $n \in \mathbb{Z}$ (ofta $n \in \{-1,-2,-3\}$). Alltså, med $\boldsymbol{r} = (x,y,z) \neq \boldsymbol{0}$.

$$\boldsymbol{F} = -c\frac{1}{r^n}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

till exempel gravitationsfältet, med $c = 9,81\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$, och det elektrostatiska fältet $\boldsymbol{E} = \text{konst}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$.

1) Visa att rot $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ i Ω:

$$\Omega = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{om } n < -2 \\ \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\} & \text{om } n \geqslant -2 \end{cases}$$

2) Beräkna en potential i Ω.

3) div $\boldsymbol{F} = 0 \Longleftrightarrow n = 2$.

[Bernhard skriver väldigt många uppgiftsnummer på tavlan, och tänker nu räkna alla, fast mer generellt.]

Sätt $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ och $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Lösning:

1.

$$\boldsymbol{F} = -c\left(\frac{x}{r^{n+1}}, \quad \frac{y}{r^{n+1}}, \quad \frac{z}{r^{n+1}}\right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \ldots$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^{n+1}}\right) = \frac{-z(n+1)}{r^{n+2}}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{-z\,x\,(n+1)}{r^{n+3}}$$

(Kontrollräkna själv:)

$$\text{rot}\,\boldsymbol{F} = -c\left(\frac{-(n+1)z\,y}{r^{n+3}} + \frac{(n-1)y\,z}{r^{n+3}}, [\text{räkna ut den}]\right) = -c(0,0,0)$$

2. Sök (för $\boldsymbol{r} \neq \mathbf{0}$) Φ så att

$$\begin{cases} \Phi'_x = -c\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\ \Phi'_y = -c\dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\ \Phi'_z = -c\dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n+1}{2}}} \end{cases}$$

Fall 1: $n = 1$:

$$\Phi(x,y,z) = -c\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2) = -c\ln r = c\ln\frac{1}{r}$$

...en logaritmisk potential. (Kolla).

Fall 2: $n \neq 1$:

$$\Phi(x,y,z) = -c\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{-n+1}{2}}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{c}{n-1}\cdot\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-1}{2}}} =$$

(Kolla).

För $n = 2$: $\Phi(x,y,z) = \frac{c}{r}$. (Elektrostatiska potentialen, gravitationspotentialen).

3.

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = -c\left(\left(\frac{x}{r^{n+1}}\right)'_x + \left(\frac{y}{r^{n+1}}\right)'_y + \left(\frac{z}{r^{n+1}}\right)'_z\right) =$$

$$= -c\left(\frac{1}{r^{n+1}} - \frac{x^2(n+1)}{r^{n+3}} + \frac{1}{r^{n+1}} - \frac{y^2(n+1)}{r^{n+3}} + \frac{1}{r^{n+1}} - \frac{z^2(n+1)}{r^{n+3}}\right) =$$

$$= -c\frac{3-(n+1)}{r^n} = 0 \Longleftrightarrow \boxed{n = 2}$$

<u>Generalisering 1:</u> $\boldsymbol{v}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{v} = -c\frac{\boldsymbol{r}}{r^{n+1}}$, $m \geqslant 2$.

Visa att $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \Longleftrightarrow n = m-1$. Do It!

<u>Generalisering 2:</u> $\boldsymbol{v} = f(r)\,\boldsymbol{r} = (f(r)\,x, f(r)\,y, f(r)\,z)$:

Visa $\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ i $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Bestäm en potential ($\Phi(r) = \int r\,f(r)\,\mathrm{d}r$).

Bestäm divergensen. $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 3\,f(r) + r\,f'(r)$.

Visa $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \Longleftrightarrow f(r) = \frac{c}{r^3}$.

Huvudexempel 2

Magnetfältet kring en oändligt lång rak ledare (låt z-axeln vara en sådan ledare):

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{r^2}(-y, x, 0) \perp \boldsymbol{E} = \frac{1}{r^2}(x, y, 0)$$

1) $\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$ i $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\colon \text{alla } z\}$ (ej enkelt sammanhängande).

2) ange en potential i t.ex. $\Omega^*\colon x > 0, y > 0, z \in \mathbb{R}$.

3)

$$\int_\gamma \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \begin{cases} 0 & \text{om } \gamma \text{ ej går runt } z\text{-axeln} \\ \pm 2\pi & \text{om } \gamma \text{ går 1 gång runt } z\text{-axeln} \end{cases}$$

γ är en sluten kurva som ej skär z-axeln.

Lösning:

1) räkna ut rot $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ (div $\boldsymbol{E} = 0$)

2) sök Φ så att

$$\begin{cases} \Phi'_x = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ \Phi'_y = \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \end{cases}$$

Till exempel $\Phi(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$. (ej definierad på y-axeln, OK i $x>0$).

Eller $\Phi(x,y) = \arctan\frac{y}{x} - \frac{\pi}{2} = -\arctan\frac{x}{y}$ finns i $y>0$: ej definierad på x-axlen.

3)

$$\int_{\gamma=\partial Y} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \pm \iint_Y \operatorname{rot} \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = 0 \quad \text{ty rot } \boldsymbol{B} = 0$$

Om $Y \subseteq \Omega \leftarrow$ fallet om γ ej går runt z-axeln. Om γ går runt z-axeln: $Y \cap z\text{-axeln} \neq \emptyset$. ta en cirkel, radien ε, i ett plan $\pi\colon z = k$ så att $\pi \cap \gamma = \emptyset$, <fig50> lämpligt orienterad så att

$$C_\varepsilon + \gamma = \partial Y_1 \quad \text{där } Y_1 \subseteq \Omega$$

Stokes:

$$\int_{C_\varepsilon+\gamma} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \pm \iint_{Y_1} \operatorname{rot} \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = 0$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \pm \int_{C_\varepsilon} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = [\text{räkna ut}] = \pm 2\pi$$