2006–02–20

(forts ö21)

Flödet av $\boldsymbol{v} = (x, y, 0)$ ut genom cylindern Y_2: $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$. <fig: bild på cylinder med normalvektor utritad, Y_2 pekar på cylindern>.

$$F = \iint_{Y_2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S = \iint_{Y_2} (x, y, 0) \cdot (x, y, 0) \,\mathrm{d}S = \iint_{Y_2} (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}S = \iint_{Y_2} \mathrm{d}S = 2\pi$$

eller:

$$Y_2\colon \quad \begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \\ z = t \end{cases}, \quad (\varphi, t) \in D, \quad \begin{matrix} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{matrix}$$

$$F = \iint_D (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}t = \iint_D \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}t = 2\pi$$

Första motivering av namnet "rot" och "rotation"

En cirkulär rörelse=rotation kring en axel ges av $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$: $\boldsymbol{\omega}$ är riktningsvektorn för axeln, $|\boldsymbol{\omega}|$ är vinkelhastighet. <fig43>

Hastighetsfältet:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_2 z - \omega_3 y, \omega_3 x - \omega_1 z, \omega_1 y - \omega_2 x)$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix} = (\omega_1 + \omega_1, \omega_2 + \omega_2, \omega_3 + \omega_3) = 2\boldsymbol{\omega}$$

SATS: (Stokes)

Förusättningar:

- $\boldsymbol{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är C^1 i $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ (Ω öppen)
- $Y \subseteq \Omega$: Y är en orienterad C^2-yta med rand ∂Y.
- Y kan delas upp i ändligt många funktionsytor (Y är lokalt en funktionsyta: implicita funktionssatsen säger när det är fallet).

Påstående:

$$\int_{\partial Y} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_Y \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$

Vänsterledet: arbetet av $\boldsymbol{v}$ längs ∂Y, cirkulationen/cirkulationsflödet av $\boldsymbol{v}$ längs ∂Y.

Högerledet: flödet av $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ genom Y i riktningen $\boldsymbol{v}$.

Ledande observation

<fig44>. Stokes sats säger: Flödet genom alla ytor med samma rand är samma ($= \int_{\partial Y} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$), t.ex. genom "tvärsnittsytan" Y_3. Speciellt i planet: <fig45>.

$$\boldsymbol{v} = (P(x,y), Q(x,y), 0)$$

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \overset{\text{Stokes}}{=\!=} \iint_D \mathrm{rot}(P,Q,0) \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S = \iint_D (0,0,Q'_x - P'_y) \cdot (0,0,1)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

Notera att $(0,0,Q'_x - P'_y)$ är vinkelrät mot x-y-planet. Titta: vi fick Greens sats!!!!!

alltså: Stokes säger: "Greens sats förblir riktig om man deformerar ytan D (inklusive rand)". Stokes $\Rightarrow$ Green, använder Green för att bevisa Stokes.

Bevis. För ytan

$$Y\colon \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x,y) \end{cases}, \quad (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

mätbar, kompakt, ∂Y ändlig, z är $\mathcal{C}^2$,... och, på ytan:

$$v(x,y,z) = (X(x,y,z(x,y)), Y(x,y,z(x,y)), Z(x,y,z(x,y)))$$

<fig47>

$$\mathrm{VL} = \int_{\partial Y} X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z = [\text{med } x, y \text{ som parametrar}] =$$

$$= \int_{\partial D} X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z(z'_x \mathrm{d}x + z'_y \mathrm{d}y) =$$

$$= \int_{\partial D} (X + Z\, z'_x)\mathrm{d}x + (Y + Z\, z'_y)\mathrm{d}y = [\text{Green}] =$$

$$= \iint_D \left((Y + Z\, z'_y)'_x - (X + Z \cdot z'_x)'_y \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

$$= \iint_D \left(Y'_x + Y'_z\, z'_x + (Z'_x + Z'_z\, z'_x) z'_y + Z\, z''_{yx} - \left(X'_y + X'_z\, z'_y + (Z'_y + Z'_z z'_y) z'_x + Z'_{xy}\right) \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

$$= \iint_D (Y'_x - X'_y + (Y'_z - Z'_y)\, z'_x + (Z'_x - X'_z) z'_y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

$$\mathrm{HL} = \iint_Y \mathrm{rot}(X,Y,Z) \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S = \iint_D (Z'_y - Y'_z, X'_z - Z'_x, Y'_x - X'_y) \cdot (-z'_x, -z'_y, 1) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

$$= \mathrm{VL}$$

□

Stokes sats ger fysikalisk tolkning av rot $\boldsymbol{v}$: Ett mått för fältets benägenhet att "**virvla**", ⟨fig48 visar Y_ε: cirkelskiva kring P_0 med radie ε⟩ är "den maximala cirkulationen kring P_0 per areaenhet":

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{\partial Y_\varepsilon} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}{m(Y_\varepsilon)} \overset{\text{Stokes}}{=\!=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int\int_{Y_\varepsilon} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S}{m(Y_\varepsilon)} = [\text{medelvärdessatsen}] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}(\xi,\eta,\zeta) \cdot \boldsymbol{n}(\xi,\eta,\zeta) \int\int_{Y_\varepsilon} \mathrm{d}S}{m(Y_\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}(\xi,\eta,\zeta) \cdot \boldsymbol{n}(\xi,\eta,\zeta) = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}(P_0) \cdot \boldsymbol{n}(P_0)$$

Det visar: Cirkulationen per areaenhet är maximal om $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}(P_0)\,\|\,\boldsymbol{n}(P_0)$. Då är den lika med

$$|\operatorname{rot}\boldsymbol{v}(P_0)|, \quad \text{ty } |\boldsymbol{n}| = 1$$

DEFINITION: $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}(P_0)$ kallas fältets **virveltendens** (kring denna vektor sker "maximal" cirkulär rörelse).

DEFINITION: $\boldsymbol{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, vi säger

1. $\boldsymbol{v}$ är **virvelfritt** (eng. *curl-free, irrotational*) i Ω om $\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ i Ω.

2. $\boldsymbol{v}$ är ett **rotationsfält** om det finns ett fält $\boldsymbol{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ så att $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}$ kallas i så fall för **vektorpotential** till $\boldsymbol{v}$.

|||.

HUVUDRESULTAT

Karaktärisering av $\begin{array}{c}\text{källfria}\\ \text{virvelfria}\end{array}$ fält:

Först en sista utvidgning av grundbegreppet "sammanhängande":

DEFINITION: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ kallas

1. **enkelt sammanhängande** om Ω är bågvis sammanhängande och varje sluten kurva $\gamma \subseteq \Omega$ kan dras ihop till en punkt i Ω utan att lämna området.

2. **konvex** om sträckan mellan $P_0, P_1 \in \Omega$ ligger i Ω.

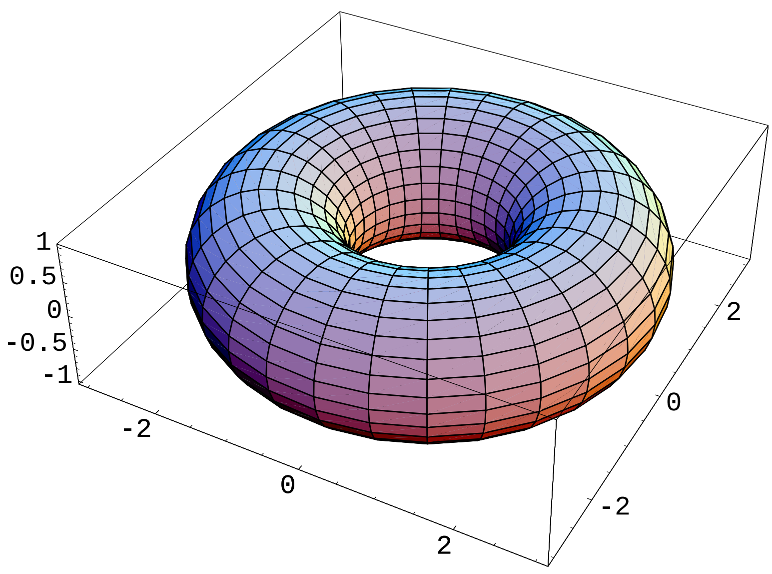
EXEMPEL:

Klot <fig bild på klot> konvex $\Rightarrow$ enkelt sammanhängande

Ta bort ett klot K_ε <fig49>: $K \setminus K_\varepsilon$ är enkelt sammanhängande, ej konvex.

Torus (se figur 1): bågvis men ej enkelt sammanhängande.

$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\colon z \in \mathbb{R}\}$ (ta bort z-axeln): är ej enkelt sammanhängande.



Figur 1. Torus

HUVUDRESULTAT

SATS:

Förutsättningar: $\boldsymbol{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}^1$ i $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, Ω öppen:

Nummer	Krav på Ω	Påstående
1	ingen	$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\Phi$ i $\Omega \Longrightarrow \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$
2	enkelt sammanhängande	$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ i $\Omega \Longrightarrow \int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}$ oberoende av vägen i Ω
3	bågvis sammanhängande	$\int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}$ oberoende av vägen i $\Omega \Rightarrow \boldsymbol{v}$ har en potential
4	ingen	$\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ i $\Omega \Longrightarrow \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ i Ω
5	konvex	$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ i $\Omega \Longrightarrow \boldsymbol{v}$ har en vektorpotential i Ω

Om $\boldsymbol{v}$ är $\mathcal{C}^2, \Omega$ enkelt sammanhängande:

$$\boxed{\boldsymbol{v} \text{ konservativt} \Longleftrightarrow \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow \int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} \text{ oberoende av vägen i } \Omega}$$

Om $\boldsymbol{v}$ är $\mathcal{C}^2, \Omega$ konvex:

$$\boxed{\boldsymbol{v} \text{ rotationsfält } \Longleftrightarrow \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0}$$

Bevis.

1. $\boldsymbol{v} = \nabla\Phi = (\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_z) \Longrightarrow$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = (\Phi''_{zy} - \Phi''_{yz}, \Phi''_{xz} - \Phi''_{zx}, \Phi''_{yx} - \Phi''_{xy}) = (0,0,0)$$

$$\nabla \times \nabla\Phi = \boldsymbol{0} \quad (\text{jämför: } \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0})$$

4. $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$. Med $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$:

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \left((A_3)'_y - (A_2)'_z, (A_1)'_z - (A_3)'_x, (A_2)'_x - (A_1)'_y\right)$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \left((A_3)'_y - (A_2)'_z\right)'_x + \left((A_1)'_z - (A_3)'_x\right)'_y + \left((A_2)'_x - (A_1)'_y\right)'_z =$$

$$= (A_3)''_{yx} - (A_2)''_{zx} + (A_1)''_{zy} - (A_3)''_{xy} + (A_2)''_{xy} - (A_1)''_{yz} = 0$$

(ty $\boldsymbol{v}$ är $\mathcal{C}^1$).

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0 \quad (\text{jämför: } \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0, \quad \text{ty faktorerna är vinkelräta})$$

□