2006–02–13

Repetition: (Problem 1) Y en yta i $\mathbb{R}^3$ med $\mathcal{C}^0$-normalfält $\boldsymbol{n}$:

$$m(Y) = \iint_Y \mathrm{d}S = \iint_D |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

[då $Y\colon \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v), (u,v) \in D, \mathcal{C}^1$]

Anmärkning: Om $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ är $\mathcal{C}^0$ på Y så definieras

$$\iint_Y f \cdot \mathrm{d}S = \iint_D f(\boldsymbol{r}(u,v))\,|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

[= Y:s totala massa, laddning,...]

Observera: Om Y är en funktionsyta $z = f(x,y), (x,y) \in D$:

$$Y\colon \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases} \qquad \boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = (-f'_x, -f'_y, 1)$$

alltså $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Själva: rotationsytor!

Problem 2

Givet ett strömnings-, hastighets-, riktningsfält $\boldsymbol{v}$ <fig33>: vektorn $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ i en punkt: $|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})| =$ den substansmängd som per area- och tidsenhet förflyttar sig i riktning $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$.

(Stationärt fält, oberoende av tiden.)

Hur mycket av "substansen" strömmar genom en yta i riktningen $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n} =$ enhetsnormalfält till Y ($\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \perp$tangentplanet till Y i $\boldsymbol{x}$, $|\boldsymbol{n}| = 1$).

Om $\boldsymbol{v}$ parallellt Y: ingenting strömmar genom Y. $\boldsymbol{v}$ vinkelrät mot Y: allt strömmar genom Y.

Allmänt: dela upp $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\|} + \boldsymbol{v}_{\perp}$ där $\boldsymbol{v}_{\|}$ är parallell med $\boldsymbol{n}$. $\boldsymbol{v}_{\perp}$ ger bidrag 0. Belopp: $|\boldsymbol{v}_{\|}| = |\boldsymbol{v}|\cos\theta = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$ ty $|\boldsymbol{n}| = 1$.

Den substansmängd som per tidsenhet flödar genom $S_{i,k}$ i riktningen $\boldsymbol{n}$ är $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\Delta S_{i,k}$.

Det totala (netto)flödet genom Y är då (approximativt):

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \Delta S_{i,k} \xrightarrow[\max \Delta S_{i,k} \to 0]{} \iint_Y \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S$$

Riemannsumma: gränsvärdet existerar om $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{n}$ är $\mathcal{C}^0$.

Definition: Om $\boldsymbol{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är $\mathcal{C}^0$ i $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $Y \subseteq \Omega$ en yta med $\mathcal{C}^0$-enhetsnormalfält så kallas

$$F = \iint_Y \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S$$

(**normal-**) **ytintegral av $\boldsymbol{v}$ över** Y.

Om $\boldsymbol{v}$ är ett strömningsfält så är F ett mått för hur mycket substans som flödar genom Y i riktnignen $\boldsymbol{n}$, så kallat **flödet av $\boldsymbol{v}$ genom Y i riktningen $\boldsymbol{n}$.** (eng. *flux*).

Beräkning:

A) Om $Y\colon \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)\colon (u,v)\in D, \mathcal{C}^1$: enhetsnormalvektorn är

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u'\times\boldsymbol{r}_v'}{|\boldsymbol{r}_u'\times\boldsymbol{r}_v'|}$$

$$F=\iint_Y \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\iint_Y \boldsymbol{v}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_u'\times\boldsymbol{r}_v'}{|\boldsymbol{r}_u'\times\boldsymbol{r}_v'|}\cdot|\boldsymbol{r}_u'\times\boldsymbol{r}_v'|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_D \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{r}_u'\times\boldsymbol{r}_v')\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

B) Om $Y\colon z=f(x,y), (x,y)\in D, f\,\mathcal{C}^1$:

$$F=\iint_Y \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\iint_D \boldsymbol{v}\cdot(-f_x',-f_y',1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Observera: $\boldsymbol{n}$ pekar “uppåt”.

Problemställning

Om $K\subseteq\mathbb{R}^3$ är en kompakt mängd, $\boldsymbol{v}$ ett strömningsfält (“eller strömmingsfält, det kan vara fisk också”). $\boldsymbol{n}$ är ett utåt riktat normalfält för ∂K. Hur mycket flödar genom ∂K:

Om flödet genom $\partial K=0$: lika mycket strömmar in som ut.

Om flödet genom $\partial K>0$: mer strömmar ut ur K än vad som strömmar in: “i K genereras/produceras/alstras substans”. Det finns källor i kroppen.

Om flödet genom $\partial K<0$: mindre strömmar ut än in: i Kkonsumeras (förintas) substans. Det finns sänkor i kroppen.

Gauss: “Allt som alstras i det inre måste genom randen (begränsningsytan) ∂K” (kan mätas över ∂K) **och** ger ett mått för det som produceras i K:

Definition: $\boldsymbol{v}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ är $\mathcal{C}^1$ (i Ω): då definieras differentialoperatorn $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ genom

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})+\cdots+\frac{\partial v_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})$$

divergens av $\boldsymbol{v}$ (i punkten $\boldsymbol{x}$). Motiveras efter satsen.

Exempel: Det elektrostatiska fältet från en punktladdning i origo

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\left(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3},\frac{z}{r^3}\right),\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Beräkna divergensen: $(\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r})$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3}=\frac{r^3-x\cdot 3\,r^2\cdot\frac{x}{r}}{r^6}=\frac{r^2-3\,x^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r^3}=\frac{r^3-y\cdot 3\,r^2\cdot\frac{y}{r}}{r^6}=\frac{r^2-3\,y^2}{r^5}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\frac{3\,r^2-3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^5}=0$$

Sats (av Gauss; Ostrogradsky, 1831, Petersburg):

Förutsättningar:

- $\boldsymbol{v}$ är ett $\mathcal{C}^1$-fält i $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$. ($\Omega$ öppen)

- K kompakt, mätbar kropp, $K \subseteq \Omega$. K kan delas upp i ändligt många standardområden i x-led, y-led samt z-led och randen ∂K har utåtriktat $\mathcal{C}^0$-enhetsnormalfält.

Påstående: nettoflödet ($\int\int_{\partial K} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S$) ut ur kroppen K:

$$\int\int_{\partial K} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \int\int\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

där högerledet är det som produceras (konsummeras) i det inre av K.

Bevis.

Steg 1. Visar det för $\boldsymbol{v}_3 = (0, 0, v_3)$ och $K_0 = \{(x, y, z) \colon (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leqslant z \leqslant \psi(x, y)\}$. <fig35>.

$$\mathrm{VL} = \int\int_{\partial K_0} (0, 0, v_3) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \int\int\int_{K_0} \operatorname{div}(0, 0, v_3) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \mathrm{HL}$$

med $\boldsymbol{n}_1$ nedåt och $\boldsymbol{n}_3$ uppåt, $\boldsymbol{n}_2$ parallell med x-y-planet (mittenintegralen nedan blir noll):

$$\mathrm{VL} = \int\int_{Y_1} (0, 0, v_3) \cdot \boldsymbol{n}_1 \, \mathrm{d}S + \int\int_{Y_2} (0, 0, v_3) \cdot \boldsymbol{n}_2 \, \mathrm{d}S + \int\int_{Y_3} (0, 0, v_3) \cdot \boldsymbol{n}_3 \, \mathrm{d}S$$

$$= \int\int_D (0, 0, v_3) \cdot (\varphi'_x, \varphi'_y, -1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + 0 + \int\int_D (0, 0, v_3) \cdot (-\psi'_x, -\psi'_y, 1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y =$$

$$= \int\int_D (-v_3(x, y, \varphi(x, y)) + v_3(x, y, \psi(x, y))) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$\mathrm{HL} = \int\int_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial}{\partial z} v_3 \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y =$$

$$= \int\int_D (v_3(x, y, \psi(x, y)) - v_3(x, y, \varphi(x, y))) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \mathrm{VL}$$

Steg 2: Addition av sådana standardområden ger

$$\int\int_{\partial K} (0, 0, v_3) \, \mathrm{d}S = \int\int\int_K (v_3)'_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

ty delningsytor Y <fig36> ger inget bidrag ($\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2$), i vänster led (ty normalen $= (\cdot, \cdot, 0)$). I höger led är ju

$$\int\int\int_{\text{nollmängd}} = 0$$

Steg 3: Analogt för $(0, v_2, 0)$ och standardområden i y-led. Analogt i x-led.

Steg 4: Addition ger påståendet: $\boldsymbol{v} = (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3)$. □

Exempel: $K \colon x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$: Flödet av $\boldsymbol{E}$ ut ur K:

$$\int\int_{\partial K} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = [\text{Gauss}] = \int\int\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 0$$

Usch! div $\boldsymbol{E} = 0$ endast bortanför origo.

Rätt lösning:

SATS: K är en kompakt mätbar mängd i $\mathbb{R}^3$ med utåtriktat $\mathcal{C}^0$-enhetsnormalfält $\boldsymbol{n}$.

$$\iint_{\partial K} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \begin{cases} 0, & \text{om } (0,0,0)\notin K \\ 4\pi, & \text{om } (0,0,0) \text{ är inre punkt i } K \\ \text{odefinierat} & \text{om } (0,0,0) \text{ ligger på randen} \end{cases}$$

Bevis.

1. Gauss gäller då och ger

$$\iint_{\partial K} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_K \operatorname{div}\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$$

2. Ta bort ett inre klot. DO IT!

□