## 2006–02–09

**Green** (i planet)

$$\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$\boldsymbol{F} = (P, Q)$ är $\mathcal{C}^1$ på en öppen mängd $\Omega \supseteq D$.

Om $\Omega$ är enkelt sammanhängande:

$$\boldsymbol{F} \text{ konservativt i } \Omega \Longleftrightarrow Q'_x = P'_y \text{ i } \Omega \Longleftrightarrow \int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \text{ är oberoende av vägen i } \Omega$$

Detta ger: "arbete = potentialskillnaden" för konservativa $\boldsymbol{F}$.

SATS: Om $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}\Phi$ i $\Omega$ så gäller för $P_0, P_1 \in \Omega$ ($\Omega$ bågvis sammanhängande):

$$\begin{bmatrix}\text{så betecknas godtycklig}\\ \text{kurva i } \Omega \text{ från } P_0 \text{ till } P_1\end{bmatrix} \to \int_{P_0}^{P_1} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \Phi(P_1) - \Phi(P_0)$$

**Bevis.**

$$\int_{P_0}^{P_1} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} =$$

$C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \alpha \xrightarrow{t} \beta$ är en $\mathcal{C}^1$-kurva i $\Omega$ med $\boldsymbol{r}(\alpha) = P_0, \boldsymbol{r}(\beta) = P_1$

$$= \int_\alpha^\beta \operatorname{grad}\Phi(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(\boldsymbol{r}(t))\,\mathrm{d}t = [\Phi(\boldsymbol{r}(t))]_\alpha^\beta = \Phi(P_1) - \Phi(P_2)$$

□

ANMÄRKNING: "Längs en nivåkurva till potentialen, i så kallade ekvipotentiallinjer (-ytor), är arbetet noll."

$$\int_{\text{längs } C:\Phi(x,y)=k} \operatorname{grad}\Phi\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(\text{slutpunkt}) - \Phi(\text{startpunkt}) = 0$$

$$\text{eller:}\quad = 0,\ \text{ty } \operatorname{grad}\Phi \perp \boldsymbol{r}' \quad (\text{nivåkurva})$$

Motivering för begreppet "konservativt".

SATS: För konservativt fält $\boldsymbol{F}$ i $\Omega$ gäller lagen om bevarande av energi i $\Omega$, dvs för två punkter $P_0, P_1 \in \Omega$ gäller:

$$P(P_0) + K(P_0) = P(P_1) + K(P_1)$$

$$P = -\Phi \quad \text{är potentiell energi}$$

$$K = \frac{m\,|\boldsymbol{r}'|^2}{2} \quad \text{är kinetisk energi}$$

**Bevis.**

$$\text{Arbete} = \int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_\alpha^\beta \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}'\,\mathrm{d}t = [\text{Newton}] =$$

($C$ är en $\mathcal{C}^1$-väg från $P_0$ till $P_1$ som ovan)

$$= \int_\alpha^\beta m\boldsymbol{r}'' \cdot \boldsymbol{r}' \,\mathrm{d}t = m \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}') \,\mathrm{d}t = \frac{m}{2} \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\boldsymbol{r}'|^2 \,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{m}{2} \left( |\boldsymbol{r}'(P_1)|^2 - |\boldsymbol{r}'(P_0)|^2 \right) = K(P_1) - K(P_0)$$

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \Phi(P_1) - \Phi(P_0) = -P(P_1) + P(P_0)$$

□

SATS: En exakt differentialekvation $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0$ har den allmänna lösningen

$$\Phi(x, y, z) = \text{konstant}$$

där $\operatorname{grad} \Phi = (P, Q, R)$.

||.

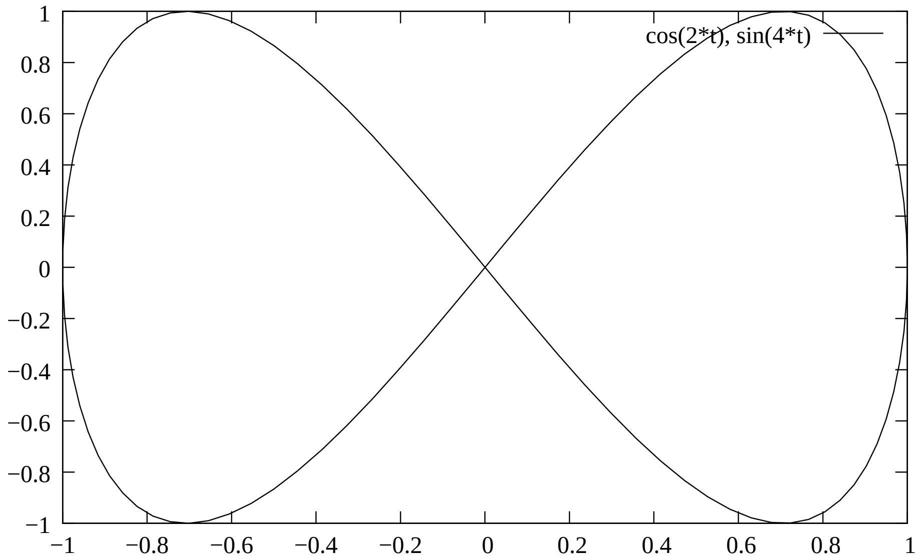
EXEMPEL: $\boldsymbol{F} = (P, Q) = \left(x^3 - 3\,x\,y^2,\, y^3 - 3\,x^2\,y\right)$

A) Är $\boldsymbol{F}$ konservativt (i $\mathbb{R}^2$)? Om ja, ange en potential till $\boldsymbol{F}$.

B) Lös differentialekvationen $(x^3 - 3\,x\,y^2)\mathrm{d}x + (y^3 - 3\,x^2 y)\mathrm{d}y = 0$.

C) Beräkna arbetet som $\boldsymbol{F}$ uträttar när en partikel rör sig längs

$$C\colon \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 4t \end{cases}, 0 \xrightarrow{t} \frac{\pi}{4} \quad \text{Lissajou}$$




Lösning:

A) ($\mathbb{R}^2$ är enkelt sammanhängande, $\boldsymbol{F}$ $\mathcal{C}^1$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{F}$ konservativt $\Longleftrightarrow Q'_x = P'_y$)

$$Q'_x = -6\,x\,y = P'_y \Longrightarrow \boldsymbol{F} \text{ är konservativt}$$

Sök $\Phi$ så att $\Phi'_x = x^3 - 3\,x\,y^2$ och $\Phi'_y(y^3 - 3\,x^2 y)$.

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{4}\,x^4 - \frac{3}{2}\,x^2\,y^2 + g(y)$$

$$\Phi'_y = 0 - 3\,x^2\,y + g'(y)$$

$$g'(y) = y^3 \Longrightarrow g(y) = \frac{1}{4}y^4 + C \quad (\text{väljer } C = 0)$$

Svar: en potential är $\Phi(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}\,x^2 y^2 + \frac{1}{4}y^4$. Kolla: grad $\Phi = \boldsymbol{F}$.

B) Differentialekvationen är exakt!: $\Phi(x,y) = k$ eller $x^4 - 6\,x^2 y^2 + y^4 = \text{konstant}$.

C)

$$\text{arbete} = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \Phi(0,0) - \Phi(1,0) = -\frac{1}{4}$$

Kap 3.1.2 och 3.2 (kap 10...)

**Ytor, ytintegral**

DEFINITION: En yta i $\mathbb{R}^3$ är en avbildning:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{aligned}$$

<fig44>: Skriver upp det så:

$$Y\colon \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v), \quad (u,v) \in D$$

utförligare:

$$Y\colon \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in D$$

EXEMPEL:

a) Sfär:

$$Y\colon \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\,\pi \end{cases}$$

b) Funktionsyta $z = f(x,y)$:

$$Y\colon \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases} \quad (x,y) \in D$$

Bra observation: Tangentvektorerna $\boldsymbol{r}'_u$ och $\boldsymbol{r}'_v$ (i en fix punkt) spänner upp tangentplanet till ytan i den aktuella punkten. Tangentplanet har alltså normalvektorn $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v$.

**Problem 1** Bestäm arean av $S$

$$D\colon \begin{cases} a \leqslant u \leqslant b \\ c \leqslant v \leqslant d \end{cases} : \quad \begin{array}{c} a = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = b \\ c = v_0 < v_1 < \cdots < v_n = d \end{array}$$

$D_{i,k}$ avbildas på $S_{i,k}$, arean av $S_{i,k}$ är $\Delta S_{i,k}$:

$$\Delta S_{i,k} \approx m\left(\text{parallellogram som spänns upp av } \begin{array}{l} \boldsymbol{r}(u_i,v_k)-\boldsymbol{r}(u_{i-1},v_k)=\boldsymbol{r}'_u(\xi_i,v_k)\Delta u_i \\ \boldsymbol{r}(u_i,v_k)-\boldsymbol{r}(u_i,v_{k-1})=\boldsymbol{r}'_v(u_i,\eta_k)\Delta u_k \end{array}\right) \approx$$

$$\approx [\text{I punkten } (u_i,v_k)] \rightarrow \quad |\boldsymbol{r}'_u \Delta u \times \boldsymbol{r}'_v \Delta v| = |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| \Delta u_i \Delta v_k$$

alltså: arean av ytan $S$ är då approximativt

$$\sum \sum \Delta S_{i,k} \underset{\max \overrightarrow{\Delta S_{i,k}} \to 0}{} \iint_Y |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

Riemannsumman har detta gränsvärde *om* $\boldsymbol{r}$ är $\mathcal{C}^1$: "ytan är en $\mathcal{C}^1$-yta".

DEFINITION: Om $Y: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v), (u,v) \in D$ är $\mathcal{C}^1$, $D$ begränsad, mätbar, så kallas talet

$$\iint_Y \mathrm{d}S = \iint_D |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

**arean av ytan** $Y$. $\mathrm{d}S = |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$ kallas ytans **areaelement**.

|||.

Jämför med $n=1$: $\mathrm{d}s = |\boldsymbol{r}'| \mathrm{d}t$:

$$L = \int_C \mathrm{d}s = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)| \, \mathrm{d}t = \int_a^b |\frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|}| \, |\boldsymbol{r}'| \, \mathrm{d}t$$

SATS: Definitionen är vettig, dvs talet $\int \int_Y \mathrm{d}S$ är oberoende av ytans parameterisering [exempel 5 i boken].

$$\begin{array}{c} \varphi: D \longrightarrow D' \\ (u,v) \mapsto (s,t) \end{array}$$

bijektiv, $\mathcal{C}^1$: då gäller $\boldsymbol{r}'_s \times \boldsymbol{r}'_t = \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v \cdot \left|\frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(s,t)}\right|$. <u>Visa det!</u>

EXEMPEL:

a) Sfär (radie $R$).

$$\boldsymbol{r}'_\theta \times \boldsymbol{r}'_\varphi = \left|\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ R\cos\theta\cos\varphi & R\cos\theta\sin\varphi & -R\sin\varphi \\ -R\sin\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{array}\right| = \left(R^2\sin^2\theta\cos\varphi, R^2\sin^2\theta\sin\varphi, R^2\cos\theta\sin\theta\right)$$

$$= R\sin\theta\,(R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta) = R\sin\theta\,(x,y,z)$$

Helt klart: normalvektorn $\| \boldsymbol{x}$.

Alltså: Sfärens area är:

$$\iint_Y \mathrm{d}S = \iint_D |\boldsymbol{r}'_\theta \times \boldsymbol{r}'_\varphi| \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= R^2[-\cos\theta]_0^\pi \cdot 2\pi = 4\pi R^2$$