2006–02–08

Reptetition: Kurvintegral (i $\mathbb{R}^n$!) av $\boldsymbol{F}$ längs C:

$$A = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z + \cdots = \int_\alpha^\beta \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t$$

då $C\colon \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)\colon \alpha \xrightarrow{t} \beta$.

Generalisering: $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ motsvaras av $\int P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$.

Viktiga begrepp: enkel kurva, sluten kurva.

! Anmärkning ! För konservativt (exakt) fält: $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}\Phi$. $\boldsymbol{F}$ har potential Φ i Ω.

1. I fysik (framför allt ellära, även mekanik) tar man $U = -\Phi$ som potential.

2. Om $\boldsymbol{F}$ är $\mathcal{C}^m$ i Ω så är Φ $\mathcal{C}^{m+1}$ i Ω.

3. Om Ω är bågvis sammanhängande (vägvis sammanhängande) så är en potential till $\boldsymbol{F}$ entydigt bestämnd så när som på en konstant. $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}\Phi_1 = \operatorname{grad}\Phi_2$ så är $\operatorname{grad}\Phi_1 - \operatorname{grad}\Phi_2 = \operatorname{grad}(\Phi_1 - \Phi_2) = \mathbf{0} \Longrightarrow \Phi_1 - \Phi_2 = \text{konstant}$.

4. Man säger även "differentialformen $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z + \cdots$" är **exakt**, samt "differentialekvationen $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z + \cdots = 0$" är **exakt**.

Sats: Kurvintegralen $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen $\Longleftrightarrow \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$ för varje sluten (enkel) kurva $\gamma \subseteq \Omega$.

Bevis.

"$\Longrightarrow$" Låt γ vara en sluten kurva i Ω som inte består av bara en punkt: välj då P_0, $P_1 \in \gamma$, $P_0 \neq P_1$, då är $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. <fig 27>

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_{-\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

(γ_1 och $-\gamma_2$ är två vägar från P_0 till P_1).

"$\Longleftarrow$" Låt C_1 och C_2 vara vägar från P_0 till P_1 i Ω <fig28>. Då är $C_1 - C_2$ en sluten kurva i Ω $\Longrightarrow$

$$\int_{C_1 - C_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

$\square$

För vilka $\boldsymbol{F}$ är kurvintegralen oberoende av vägen?

Först: i $\mathbb{R}^2$.

Sats: (satsen av Green, 1828).

Förutsättningar:

- $\boldsymbol{F}$ är $\mathcal{C}^1$ i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. $\boldsymbol{F} = (P, Q)$
- $D \subseteq \Omega$ mätbar, begränsad med positivt orienterad styckvis $\mathcal{C}^1$-rand ∂D (ändlig längd) som kan uppdelas i ändligt många standardområden i x-led och i ändligt många standardområden i y-led. <fig29>.

Påstående:

$$\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Bevis.

Steg 1: Visa satsen för ett standardområde E: $\left\{ \begin{smallmatrix} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \text{ kontinuerliga} \end{smallmatrix} \right.$ (positivt orienterad rand) och $\boldsymbol{F}_1 = (P, 0)$ dvs

$$\int_{\partial E} P\,\mathrm{d}x = \iint_E (-P'_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{VL} = \int_{\partial E} P\,\mathrm{d}x = \int_{C_1} P\,\mathrm{d}x + \int_{C_2} P\,\mathrm{d}x + \int_{C_3} P\,\mathrm{d}x + \int_{C_4} P\,\mathrm{d}x =$$

$$\left[C_1\colon \begin{cases} x = a,\, \mathrm{d}x = 0\,\mathrm{d}t \\ y = t,\, \psi(a) \xrightarrow{t} \varphi(a) \end{cases} \quad C_2\colon \begin{cases} x = t,\, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ y = \varphi(t),\, a \xrightarrow{t} b \end{cases} \right]$$

$$= 0 + \int_a^b P(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t + 0 + \int_b^a P(t, \psi(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b (P(t, \varphi(t)) - P(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t = \mathrm{VL}$$

$$\mathrm{HL} = \iint_E (-P'_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (-P'_y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b [-P(x, y)]_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b (-P(x, \psi(x)) + P(x, \varphi(x)))\,\mathrm{d}x = \mathrm{VL}$$

Steg 2:

$$\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x = \iint_D (-P'_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ty D delas upp i ändligt många sådana standardområden och <fig30>. Delningskruvorna genomlöps två gånger, i motsatt riktning, ger alltså inget bidrag i kurvintegralen. I högerledet är delningskurvan en nollmängd.

Steg 3: Visa först

$$\int_{\partial M} Q\,\mathrm{d}y = \iint_M Q'_x \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{där } M\colon \begin{cases} c \leqslant y \leqslant d \\ \alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y) \end{cases}$$

(med positivt orienterad ∂M) för $\boldsymbol{F}_2 = (0, Q)$ på samma sätt. Addition ger

$$\int_{\partial D} Q\,\mathrm{d}y = \iint_D Q'_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Steg 4: Addera $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$:

$$\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + \int_{\partial D} Q\,\mathrm{d}y = \iint_D (-P'_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D Q'_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

□

Exempel: beräkna det arbete som $\boldsymbol{F} = \left(\sin(x^3) - y^3, \mathrm{e}^{y^2} + x^3\right)$ uträttar då en partikel förflyttas ett varv motursrunt D <fig31>.

$$D\colon \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant x \end{cases}$$

Lösning:

$$A=\int_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \overset{\text{Green}}{=} \iint_D (Q'_x-P'_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D (3\,x^2-3\,y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=[\text{polära koordinater}]=$$

$$=\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{r=0}^{1} 3\,r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{4}$$

SATS: (HUVUDRESULTAT för planet)

Förutsättning: $\boldsymbol{F}=(P,Q)\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ är $\mathcal{C}^1$ i öppen $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$.

	Förutsättningar på Ω	
1)	inga	Om $\boldsymbol{F}$ är konservativt i Ω så gäller $Q'_x=P'_y$ i Ω.
2)	Ω enkelt sammanhängande	Om $Q'_x=P'_y$ i Ω så är $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ oberoende av vägen i Ω.
3)	Ω bågvis sammanhängande (gäller i $\mathbb{R}^n$)	Om $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen i Ω så är $\boldsymbol{F}$ konservativt i Ω.

3 visade Euler 1734 för rektangelformat Ω: $Q'_x=P'_y\Longrightarrow F=\operatorname{grad}\Phi$.

Om Ω är enkelt sammahängande: $\boldsymbol{F}$ konservativt $\Longleftrightarrow \int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen $\Longleftrightarrow Q'_x=P'_y$ i Ω.

Bevis. (Tentauppgift)

1) Om $\boldsymbol{F}=\operatorname{grad}\Phi=(\Phi'_x,\Phi'_y)$ så gäller $P'_y=\Phi''_{xy}=Q'_x$ ($\Phi''_{xy}=\Phi''_{yx}$ ty kontinuerlig)

2) Om $Q'_x=P'_y$ så är för sluten kurva $\gamma\subseteq\Omega$:

$$\int_\gamma P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\pm\iint_D (Q'_x-P'_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

där D är området innaför γ (hela $D\subseteq\Omega$: här behövs *enkelt* sammanhängande).

3) Vi konstruerar helt enkelt en potential till $\boldsymbol{F}$ (godtycklig dimensioner, men vi räknar nu i $\mathbb{R}^2$. Välj $\boldsymbol{a}\in\Omega$: Till varje punkt $\boldsymbol{x}\in\Omega$ finns då en $\mathcal{C}^1$-väg (Ω är öppen, bågvis sammanhängande) $\gamma\subseteq\Omega$: sätt

$$\Phi(\boldsymbol{x})=\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\ \left[\begin{matrix}\text{betyder: längs}\\ \text{någon godtycklig kurva}\end{matrix}\right]$$

$\Phi(\boldsymbol{x})$ är väldefinierad, skall visa $\operatorname{grad}\Phi=\boldsymbol{F}$, dvs

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}\Phi=P\\ \frac{\partial}{\partial y}\Phi=Q\end{cases}\quad \text{i varje } (x_0,y_0)\in\Omega\text{:}$$

Med h så litet att $C_1\subseteq\Omega$. <fig32>

$$\frac{\Phi(x_0+h,y_0)-\Phi(x_0,y_0)}{h}=\frac{1}{h}\left(\int_{(a,b)}^{(x_0+h,y_0)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}-\int_{(a,b)}^{(x_0,y_0)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right)=$$

$$=\frac{1}{h}\cdot\int_{(x_0,y_0)}^{(x_0+h,y_0)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}P(t,y_0)\,\mathrm{d}t=[\text{medelvärdessatsen}]=$$

Med τ mellan x_0 och x_0+h

$$=\frac{1}{h}P(\tau,y_0)\,h=P(\tau,y_0)\underset{\text{då }h\to 0}{\longrightarrow}P(x_0,y_0)$$

ty P är kontinuerlig.

□