# 2006–02–06

**Nu fysikaliska tillämpningar ("vektoranalys")** (Kapitel 9)

Kom ihåg: $C\colon \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(x_1(t),\ldots,(x_n(t)),\alpha\xrightarrow{t}\beta$ är en $\mathcal{C}^m$-kurva i $\mathbb{R}^n$ (från $\boldsymbol{r}(\alpha)$ till $\boldsymbol{r}(\beta)$).

$$\boldsymbol{r}'(t)=(x_1'(t),\ldots,x_n'(t))$$

är en tangentvektor om $\boldsymbol{r}'(t)\neq\boldsymbol{0}$.

$$\text{längd}=\int_C \mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta |\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$$

**Kurvintegral** (arbete)

Om $\boldsymbol{F}$ är konstant, så är arbetet längs en rak väg "kraft · väg". Om kraftvektorn i punkten $P_0$ inte är parallell med vägen, så är kraftkomponenten i riktningen $\boldsymbol{v}$. Det arbete som $\boldsymbol{F}$ uträttar då en partikel förflyttas från punkten $P_0$ till $P_1$ är $A=|\boldsymbol{F}|\cos\varphi\cdot\overrightarrow{P_0P_1}=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{P_0P_1}$. Om $\boldsymbol{F}$ inte är konstant då approximeras arbete längs en godtycklig kurva $C\colon \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, $\alpha\xrightarrow{t}\beta$ så här <fig24>. Sönderdela $[\alpha,\beta]\colon \alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta$ ger punkterna $P_k=\boldsymbol{r}(t_k)$ på $C$.

$$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$$

Betrakta $\boldsymbol{F}$ konstant längs $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$:

$$A\approx\sum_{k=1}^n \boldsymbol{F}(P_{k-1})\cdot\overrightarrow{P_{k-1}P_k}=\sum_{k=1}^n \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t_k))\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}(t_k)-\boldsymbol{r}(t_{k-1})}{\Delta t_k}\right)\Delta t_k$$

då $\max\Delta t_k\to 0$:

$$\longrightarrow\int_\alpha^\beta \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t$$

om $\boldsymbol{F}$ är kontinuerlig och $\boldsymbol{r}'$ kontinuerlig.

Då har vi motiverat:

Definition: $\boldsymbol{F}$ är $\mathcal{C}^0$ i $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, $C\colon \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\alpha\xrightarrow{t}\beta$ är en $\mathcal{C}^1$-kurva i $\Omega$, då kallas talet

$$A=\int_\alpha^\beta \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t=\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

**kurvintegral av $\boldsymbol{F}$ längs $C$.**

Om $\boldsymbol{F}$ är ett kraftfält så är $A=$ det **arbete som $\boldsymbol{F}$ uträttar längs $C$** (dvs då en partikel förflyttas från $\boldsymbol{r}(\alpha)$ till $\boldsymbol{r}(\beta)$ längs $C$.)

Sats: Definitionen är vettig, dvs talet $A$ är oberoende av kurvans parameterframställning.

**Bevis.** (annan parameterframställning: variabelbyte i integralen, kedjeregeln)

$C\colon \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)\colon \alpha\xrightarrow{t}\beta$. Annan parameterisering: $C\colon \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1(u)$, $a\xrightarrow{u}b$, tar (utan att det innebär någon inskränkning) $a<b$

$$A=\int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1(u))\cdot\boldsymbol{r}_1'(u)\,\mathrm{d}u$$

$$\begin{aligned}\varphi\colon [a,b]&\longrightarrow[\alpha,\beta]\\ u&\mapsto t\end{aligned}$$

bijektiv, $\mathcal{C}^1$ med $\varphi(a)=\alpha$, $\varphi(b)=\beta$, (t.ex. $\varphi(u)=\alpha+\frac{(\beta-\alpha)(u-a)}{b-a}$).

$$\boldsymbol{r}_1(u)=\boldsymbol{r}(\varphi(u))$$

$$A=\int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1(u))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\boldsymbol{r}(\varphi(u))\,\mathrm{d}u=\int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(\varphi(u)))\cdot\boldsymbol{r}'(\varphi(u)))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u=$$

$$\int_\alpha^\beta \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t$$

$\square$

Vi skriver nu $A$ "parameterfritt": (motivering i $\mathbb{R}^3$): $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$, $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$:

$$A=\int_\alpha^\beta (P,Q,R)\cdot(x',y',z')\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta (P\,x'\,\mathrm{d}t+Q\,y'\,\mathrm{d}t+R\,z'\mathrm{d}t)=$$

$$=\int_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

(med $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)=(x',y',z')\,\mathrm{d}t=\boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t$ i någon parameterisering).

Om $C\colon \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t), \alpha\xrightarrow{t}\beta$.

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z+(\cdots)=\int_\alpha^\beta \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t$$

Exempel: $\boldsymbol{F}(x,y)=(2\,y,x)$: Beräkna det arbete som $\boldsymbol{F}$ uträttar då en artikel förflyttas i planet från $(1,0)$ till $(0,1)$ längs:

a) sträckan $C_1$ (Rita alltid).<fig25>

Steg ett: parameterisera kurvan:

$$C_1\colon \begin{cases} x=t \\ y=1-t \end{cases}, 1\xrightarrow{t}0$$

$$\boldsymbol{r}(t)=(t,1-t)$$
$$\boldsymbol{r}'(t)=(1,-1)$$

$$A=\int_{C_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{C_1}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^0 (2-2t,t)\cdot(1,-1)\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int_1^0 (2-3\,t)\,\mathrm{d}t=\left[2\,t-\frac{3}{2}t^2\right]_1^0=-\frac{1}{2}$$

b) enhetscirkel $C_2$ (kortaste vägen)

$$C_2\colon \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}, 0\xrightarrow{t}\frac{\pi}{2}$$

$$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t,\sin t)$$
$$\boldsymbol{r}'(t)=(-\sin t,\cos t)$$

$$A=\int_{C_2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}'\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin t,\cos t)\cdot(-\sin t,\cos t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2\sin^2 t+\cos^2 t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-3\sin^2 t)\,\mathrm{d}t=$$

$$=\left[-\frac{1}{2}t+\frac{3\sin 2\,t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{\pi}{4}$$

Eller, alternativ parameterisering

$$C_2 \colon \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}, 1 \xrightarrow{t} 0$$

$$A = -\frac{\pi}{4} = \int_1^0 \left(2\sqrt{1 - t^2}, t\right) \cdot \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}}\right) \mathrm{d}t = \text{ Do It!}$$

Nu nya begrepp:

A) för kurvor

B) för mängder

C) för fält

A) för kurvor.

DEFINITION: $C \colon \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \alpha \xrightarrow{t} \beta$ en kruva i $\mathbb{R}^n$.

1. Kurvan $-C$ definieras som $-C \colon \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \beta \xrightarrow{t} \alpha$, samma punktmängd, med motsatt genomlöpsriktning.

2. Om $C_1$ och $C_2$ är två kurvor i $\mathbb{R}^n$ så definieras $C_1 + C_2$ som den kurva som fås då man genomlöper först $C_1$ och sedan $C_2$. Man skriver $C_1 + (-C_2) = C_1 - C_2$ och $C - C = 0$.

3. $C$ kallas **sluten** (eng. *closed*) om $\boldsymbol{r}(\beta) = \boldsymbol{r}(\alpha)$. (Blanda inte ihop “sluten mängd” och “sluten kurva”.)

4. $C$ kallas **enkel** (eng. *simple*) om $\boldsymbol{r}$ är injektiv på $]\alpha, \beta[$, dvs “dubbelpunktsfri”, “skär ej sig själv”.

5. Kurvor i $\mathbb{R}^2$: En sluten kurva i $\mathbb{R}^2$ är **positivt orienterad** om den genomlöps moturs.

SATS:

a) $\int_{-C} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$

b) $\int_{C_1 + C_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

B) Mängder: OBS: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

DEFINITION:

1. $\Omega$ kallas **enkelt sammanhängande** (eng. *simply connected*). Om $\Omega$ är bågvis sammanhängande *och* “utan hål”, dvs varje enkel sluten kurva i $\Omega$ omsluter endast punkter ur $\Omega$. Kurvan kan dras ihop till en punkt i $\Omega$.

2. $\Omega$ har positivt orienterad rand om $\Omega$ ligger vänster om $\partial\Omega$. <fig26>

C. Fält

DEFINITION:

1. Kurvintegralen $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen i $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ om

$$\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

för alla $C^1$-kurvor i $\Omega$ med samma start och ändpunkt.

2. $\boldsymbol{F} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kallas **konservativt** i $\Omega$ om det finns en funktion $\Phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ så att $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} \Phi$ i $\Omega$. Denna funktion $\Phi$ kallas då **potential till $\boldsymbol{F}$** i $\Omega$.

Andra namn: *gradientfält*, *potentialfält*, *exakt*.