2006–02–02

Repetition:

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \longrightarrow 1 \quad \text{då} \quad x\to\infty \qquad \left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}\right]$$

Konvergensuppgift För vilka α konvergerar

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad ?$$

Lösning Välj D_n: $x^2+y^2\leqslant n^2$ som uttömmande följd:

$$I_n=\iint_{D_n}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=[\text{polära koordinater}]=$$

$$=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{n}\frac{1}{(1+r^2)^\alpha}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=[\varphi]_0^{2\pi}\cdot\int_0^n\frac{r}{(1+r^2)^\alpha}\,\mathrm{d}r=$$

$$=\begin{cases} 2\pi\left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^n & \text{om } \alpha=1\\ 2\pi\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+r^2)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^n & \text{om } \alpha\neq 1\end{cases}=$$

$$I_n=\begin{cases}\pi\ln(1+n^2) \quad \text{om } \alpha=1 & \longrightarrow\infty \text{ då } n\to\infty\\ \frac{\pi}{1-\alpha}\left((1-n^2)^{1-\alpha}-1\right) \quad \text{om } \alpha\neq 0 & \longrightarrow\begin{cases}\infty \ \text{ då } n\to\infty & \text{om } \alpha<1\\ \frac{\pi}{1-\alpha}(0-1) \ \text{ då } n\to\infty & \text{om } \alpha>1\end{cases}\end{cases}$$

Svar: integralen är konvergent (och lika med $\frac{\pi}{\alpha-1}$) om $\alpha>1$, och divergent om $\alpha\leqslant 1$.

Anmärkning: $f\geqslant 0$ är viktigt.

Motexempel:

$$D:\quad\begin{cases}0\leqslant x\\ -2\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$$

$$\iint_D x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y: \qquad \int_0^\infty x\left(\int_{-2}^2 y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=0$$

$$\text{men} \qquad \int_{-2}^2 y\left(\int_0^\infty x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \quad \text{är dock divergent.}$$

Anmärkning: Om $f\geqslant 0$ så är följden $(I_n)_{n=1}^\infty$ växande (D_n är en uttömmande följd). Alltså: konvergent $\Longleftrightarrow$ begränsad uppåt.

Sats: Om $0\leqslant f(x,y)\leqslant g(x,y)$, så gäller ($f,g$ är kontinuerliga):

$$\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ \text{ konvergent } \Longrightarrow \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ \text{ konvergent}$$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ \text{ divergent } \Longrightarrow \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ \text{ divergent}$$

ANMÄRKNING: Godtyckliga f kan behandlas så här:

Om $\int\int_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ är konvergent ("f är absolut integrerbar") så kan man sätta

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\int_D (f(x,y) + |f(x,y)|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int\int_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

||.

$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\sum_i \sum_k f(\xi_i, \eta_k)\,\Delta x_i\,\Delta y_i \longrightarrow \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

och så vidare på samma sätt i högre dimensioner.

Trippelintegraler

$K \subseteq \mathbb{R}^3$: K är (Jordan-) mätbar om K är begränsad och det till varje $\varepsilon > 0$ finns rätblock ("tegelstenar") D_{ikl} $(m(D_{ikl}) = \Delta x_i\,\Delta y_k\,\Delta z_l)$ med sammanlagda volymen $< \varepsilon$ som övertäcker ∂K (randen).

Om f är kontinuerlig på K (K är mätbar, begränsad) så har Riemann-summorna

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{p} f(\xi_i, \eta_k, \zeta_l)\,\Delta x_i\,\Delta y_k\,\Delta z_l$$

med $(\xi_i, \eta_k, \zeta_l) \in D_{ikl}$, ett gränsvärde då max $\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_k^2 + \Delta z_l^2} \to 0$ som skrivs

$$\int\int\int_K f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

BERÄKNING: (Förutsättningar som ovan)

SATS: Om $K = \{(x,y,z)\colon (x,y) \in D, D$ mätbar, $\varphi(x,y) \leqslant z \leqslant \psi(x,y)$, φ och ψ kontinuerliga$\}$. <fig21>.

$$\int\int\int_K f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\int_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Resultatet av den inre integrationen $F(x,y)$ är kontinuerlig.

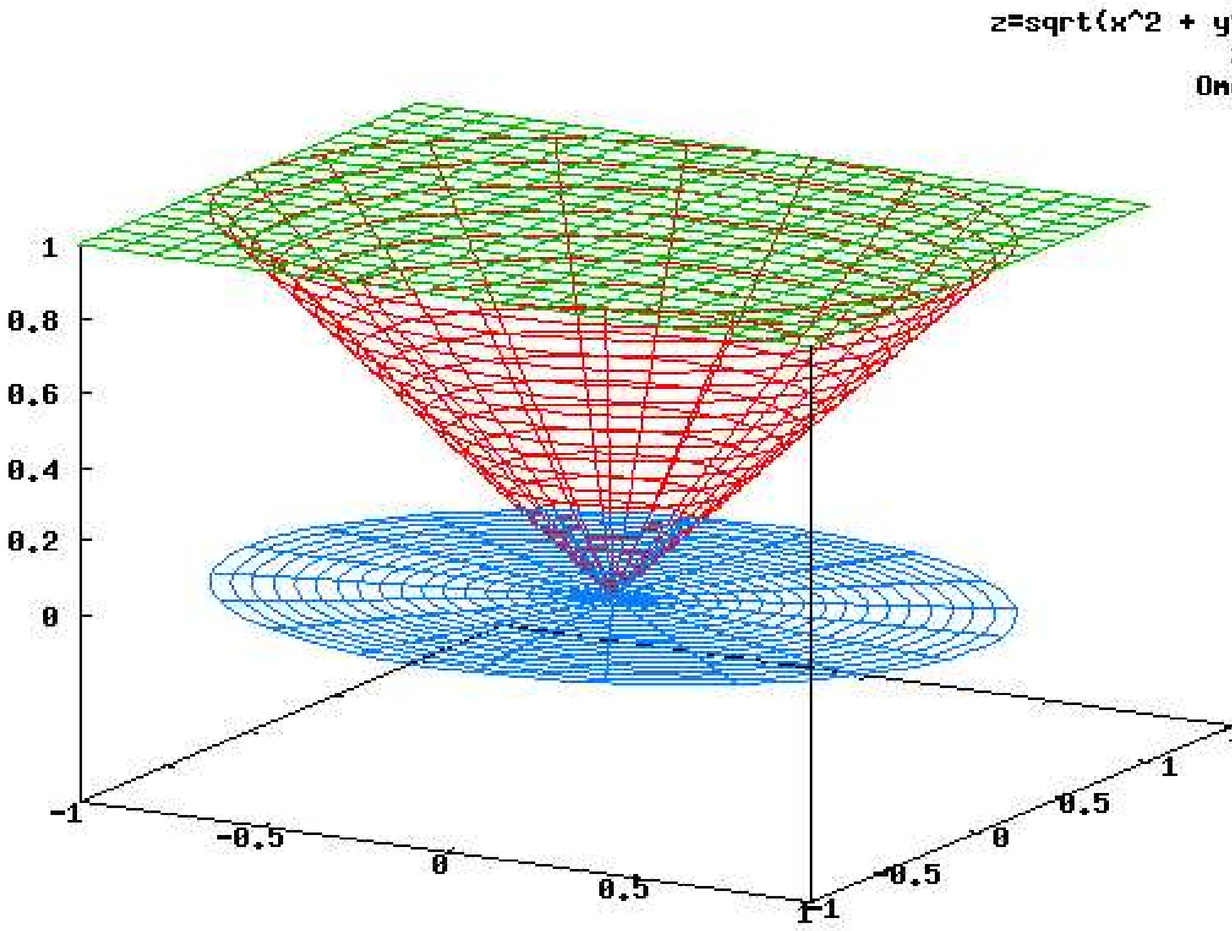
SATS: Om kroppen ligger mellan planen $z = c$ och $z = d$. <fig22>. D_{z_0} är projektionen av tvärsnittsytan $K \cap (z = z_0)$. Då är

$$\int\int\int_K f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_c^d \left(\int\int_{D_z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

7.3 Beräkna

$$J = \int\int\int_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

där $D = \{(x,y,z)\colon 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant z^2, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$. $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$ är en kon.



$$J=\iiint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_\Omega \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 (x^2+y^2)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$=\iint_\Omega (x^2+y^2)(1-\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=[\text{polära koordinater}]=$$

$$=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r^2(1-r)\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}f=2\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$$

Samma regler som för enkel- och dubbelintegral: linjär, additiv...

Speciellt:

$$\iiint_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_D\left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D(\psi(x,y)-\varphi(x,y))\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=m(K)$$

Volymen av K.

Variabelsubstitution

SATS: $K \subseteq \mathbb{R}^3$ begränsad, mätbar, $\begin{array}{c} \boldsymbol{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (u, v, w) \end{array}$ bijektiv, $\mathcal{C}^1$ på öppen $\Omega \supseteq K$, f kontinuerlig på K.

$$\iiint_K f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{K'} f(u, v, w) \left| \frac{\mathrm{d}(x, y, z)}{\mathrm{d}(u, v, w)} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

där funktionealdeterminanten är en skalfaktor som anger volymförstoring/förminskning då man går från u, v, w-rummet till x, y, z-rummet.

Viktigaste substitioner:

1. linjär substitution

2. rymdpolära (och sfäriska) koordinater

$$P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{eller} \quad \boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$\begin{cases} r = \text{avstånd från origo} \\ \varphi = \text{vinkeln mellan } \boldsymbol{r} \text{ och positiva } x\text{-axeln } (0 \leqslant \varphi < 2\pi) \\ \theta = \text{vinkeln mellan } \boldsymbol{r} \text{ och positiva } z\text{-axeln } (0 \leqslant \theta \leqslant \pi) \end{cases}$$

Det ger

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}(x, y, z)}{\mathrm{d}(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2 \sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2 \sin\theta \left(\cos\theta \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} + \sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} \right) =$$

$$= r^2 \sin\theta(\cos^2\theta \cdot 1 + \sin^2\theta \cdot 1) = r^2 \sin\theta$$

LÄR IN!