# 2006–02–01

## Variabelsubstitution

**Problemställning** Vad är sambandet mellan areorna $m(D)$ och $m(D')$ vid en transformation $\boldsymbol{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (u, v)$ som avbildar $D$ på $D'$? Svar: $m(D) \approx \left|\frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)}\right| m(D')$, dvs beloppet av Jacobi-determinanten är den skalfaktor som anger areaförstoring då man går från $x$-$y$- till $u$-$v$-planet.

**Motivering**

1. Linjär substitution:

$$\begin{cases} u = a\,x + b\,y \\ v = c\,x + d\,y \end{cases}$$

<fig18>. $m(D) = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = \Delta x \Delta y$.

$$m(D') = |\begin{vmatrix} u_2 - u_1 & v_2 - v_1 \\ u_4 - u_1 & v_4 - v_1 \end{vmatrix}|$$

$$\begin{cases} u_1 = a\,x_1 + b\,y_1 \\ u_2 = a\,x_2 + b\,y_1 \\ u_4 = a\,x_1 + b\,y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = c\,x_1 + d\,y_1 \\ v_2 = c\,x_2 + d\,y_2 \\ v_3 = c\,x_1 + d\,y_2 \end{cases}$$

$$m(D') = |\begin{vmatrix} a(x_2 - x_1) & c(x_2 - x_1) \\ b(y_2 - y_1) & d(y_2 - y_1) \end{vmatrix}| = |(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}| = m(D) \cdot |\frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)}|$$

Lika, i varje punkt.

2. Godtycklig $\mathcal{C}^1$-substitution:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

$m(D) = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = \Delta x \Delta y$. $m(D')$ approximeras då av parallellogrammen:

$$m(D') \approx |\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4}| = |\begin{vmatrix} u_2 - u_1 & v_2 - v_1 \\ u_4 - u_1 & v_4 - v_1 \end{vmatrix}|$$

$$u_2 - u_1 = u(x_2, y_1) - u(x_1, y_1) = u'_x(\xi_1, y_1)\,(x_2 - x_1) \quad \text{med } \xi_1 \text{ mellan } x_1 \text{ och } x_2$$

$$v_2 - v_1 = v(x_2, y_1) - v(x_1, y_1) = v'_x(\xi_2, y_1)\,(x_2 - x_1) \quad \text{med } \xi_2 \text{ mellan } x_1 \text{ och } x_2$$

$$u_4 - u_1 = u(x_1, y_2) - u(x_1, y_1) = u'_y(x_1, \eta_1)\,(y_2 - y_1)$$

$$v_4 - v_1 = v(x_1, y_2) - v(x_1, y_1) = v'_y(x_1, \eta_2)\,(y_2 - y_1)$$

$$m(D') \approx |\begin{vmatrix} u'_x(\xi_1, y_1)\Delta x & v'_x(\xi_2, y_1)\Delta x \\ u'_y(x_1, \eta_1)\Delta y & v'_y(x_1, \eta_2)\Delta y \end{vmatrix}| \approx |\Delta x \Delta y \begin{vmatrix} u'_x & u'_x \\ u'_y & v'_y \end{vmatrix}| \quad \text{för någon punkt } (\xi, \eta) \in D$$

Om $\frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)} \neq 0$: $m(D) > 0 \Longrightarrow m(D') > 0$.

ANMÄRKNING: Alltså $m(D) \approx \frac{1}{|\frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)}|} m(D') = |\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}|\, m(D')$.

Det ger nu, <fig19>,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_i,\eta_k)\Delta x_i \Delta y_k \overset{\max m(D_{ik})\to 0}{\longrightarrow} \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_i,\eta_k)\Delta x_i \Delta y_k \approx \sum\sum f(\xi_i(u,v),\eta_k(u,v))\,|\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}|\, m(D_i'k)$$

$$\underset{\Leftrightarrow m(D_{ik})\to 0}{\overset{\text{då } m(D_{ik}')\to 0}{\longrightarrow}} \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

SATS: $D\subseteq \mathbb{R}^2$, begränsad, mätbar, $f$ kontinuerlig på $D$, $\boldsymbol{T}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, bijektiv, $\mathcal{C}^1$ (på en öppen mängd $\supset D$) som avbildar $D$ på $D'$. Då gäller

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} f(u,v)\left|\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

EXEMPEL: Volymen av ett klot: $K\colon x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$: <fig20>:

$$m(K) = 2\cdot\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left[\begin{array}{c}\text{polära koordinater:}\\ x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ \dfrac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(r,\varphi)}=r!\end{array}\right] =$$

$$= 2\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}r\right) =$$

$$= 4\pi\left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R = \frac{4\pi}{3}R^3$$

---

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(u,v)\cdot\left|\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

---

**Ö. 45**

$$\begin{array}{c}\boldsymbol{T}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x,y)\mapsto(u,v)\end{array}\quad \left\{\begin{array}{l}u=x^3\\ v=y^3\end{array}\right.$$

$D\colon x^2+y^2\leqslant 1$ avbildas på $D'$. Beräkna $m(D')=$ arean av $D'$.

Lösning: är $\boldsymbol{T}$ (lokalt) bijektiv?

$$\frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)} = \left|\begin{array}{cc}3x^2 & 0\\ 0 & 3y^2\end{array}\right| = 9x^2y^2$$

inversa funktionssatsen: $\boldsymbol{T}$ är bijektiv lokalt i varje punkt $(a,\, b)$ med $a\, b \neq 0$. Men vi ser: $\boldsymbol{T}$ är bijektiv på hela $\mathbb{R}^2$ ty $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \Longrightarrow (x_1^3, y_1^3) \neq (x_2^2, y_2^2)$.

$$m(D') = \iint_{D'} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_D \left|\frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)}\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D 9\,x^2 y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = [\text{polära koordinater}] =$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} 9\cos^2\varphi\,\sin^2\varphi\, r^4 \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 9\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{(\sin 2\varphi)^2}{4}\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{9}{6}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4\varphi}{4\cdot 2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{8}\cdot\frac{2\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi$$

$D'$: $u^{2/3} + v^{2/3} \leqslant 1$ är en asteroid.

**Generaliserade (dubbel-) integraler**

Om $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ej är begränsad och/eller $f$ ej är kontinuerlig på $D$, då kallar vi

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

en generaliserad integral.

Behandlas så här:

DEFINITION: En följd $D_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $D_n \subseteq \mathbb{R}^2$ kallas **uttömmande till** $D$ och $f$ (engelska: exhausting) om

- $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq \cdots \subseteq D_n \subseteq \cdots$
- $D_k$ är mätbar, begränsad.
- $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = D \backslash M$, där $M$ är en nollmängd.
- $f$ kontinuerlig på $D_n$

EXEMPEL på uttömmande följder till $\mathbb{R}^2$ (godtyckligt $f$):

a) $D_n$: $x^2 + y^2 \leqslant n^2$. Cirklar.

b) $D_n$: $|x| \leqslant n$ och $|y| \leqslant n$. Samma med kvadrater.

c) $D$: $|x| + |y| \leqslant n$. Nu har vi vridit på kvadraterna (rita!).

DEFINITION: $f$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$ $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Vi säger: Den generaliserade integralen $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ är **konvergent** om det finns en uttömmande följd $D_n$ till området $D$ och $f$ så att

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

existerar, och då sätter vi

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ är **divergent** om det finns en uttömmande följd till $D$ och $f$ så att

$\iint_{D_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ saknar gränsvärde då $n \to \infty$.

SATS: Definitionen är vettig, dvs $\int\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ är ($f \geqslant 0$!!!) divergent för alla uttömmande följder eller konvergent med samma gränsvärde för alla uttömmande följder.

SATS: Fubini gäller även för generaliserade integraler.

EXEMPEL: (viktig, statistik, fysik)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = ??$$

$$\left[\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \longrightarrow 1 \ \text{ då } x \to \infty\right]$$

Lösning:

$$I \cdot I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y \overset{\text{FUBINI}}{=\!=} \int\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$I_n = \int\int_{D_n} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = [\text{polära koordinater}] = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{n} r\,\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\,\pi\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^n = \pi\left(1-\mathrm{e}^{-n^2}\right) \to \pi \ \text{ då } n \to \infty$$