2006–01–30

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $D = \{(x, y): a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ (eller i alla fall begränsad, mätbar).

f integerbar över D om

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} f(\xi_i, \eta_k) \Delta x_i \Delta y_k \longrightarrow \int\int f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{då} \quad \max \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$$

! Anmärkning:

D behöver ej vara en axelparallell rektangel, utan det räcker att "D kan approximeras med axelparallella rektanglar" (D begränsad):

Definition: En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kallas **nollmängd** om det till varje $\varepsilon > 0$ finns (axelparallella) rektanglar som övertäcker D och vars sammanlagda area är $< \varepsilon$. $m(D) = 0$.

Definition: En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kallas (Jordan-) **mätbar** om D är begränsad och randen ∂D är en nollmänd.

Exempel på nollmängder:

a) punkter: $m(\{(a, b)\}) = 0$

b) $\mathcal{C}^0$-kurvor: Om C är en $\mathcal{C}^0$-kurva av ändlig längd så är $m(C) = 0$.

Anmärkning:

Man kan approximera D med mätbara mängder D_j.

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j, \eta_j) m(D_j) \overset{\max m(D_j) \to 0}{\longrightarrow} \int\int_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Beräkning:

Sats: (Fubini, upprepad/itererad integration). $D: \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$, f integrerbar på D <fig14>.

$$\int\int_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Bevis. För fixt $y = \eta$: tväsnittsytan kroppen $K \cap \{\text{planet } y = \eta\}$:

$$A(\eta) = \int_a^b f(x, \eta)\,\mathrm{d}x: \quad \text{kontinurelig funktion } A(y)$$

"Skivorna": $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$: (tjocklek Δy_k, höjd $f(x, \eta_k)$), $y_{k-1} \leqslant \eta_k \leqslant y_k$, approximerar K:

$$\sum_{k=1}^{m} A(\eta_k) \Delta y_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b f(x, \eta_k)\,\mathrm{d}x \right) \Delta y_k \longrightarrow \int_c^d A(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Analogt i x-led:

$$A(\xi) = \int_c^d f(\xi, y)\,\mathrm{d}y = \text{arean av tvärsnittsytan } K \cap (\text{planet } x = \xi)$$

$\square$

6.4 Beräkna, $\Delta: 0 \leqslant x \leqslant 1; -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\iint_{\Delta} y \sin(y + x y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 y \sin(y + x y) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [-\cos(y + x y)]_{x=0}^{x=1} \mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos y - 2y) \,\mathrm{d}y = 2\left[\sin y - \frac{1}{2}\sin 2y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

6.6 $\Delta: \left\{ \begin{smallmatrix} -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 \leqslant y \leqslant 2 \end{smallmatrix} \right.$. Integranden är udda:

$$\iint_{\Delta} \frac{y \sin x}{(1 + x^2 + y^2)^3} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_{-2}^2 \frac{y \sin x}{(1 + x^2 + y^2)^3} \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = 0$$

Sats: (integration över “standardområden”)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig på $D \subseteq \mathbb{R}^2$. φ, ψ, α, β är kontinuerliga.

A) Om $D = \{(x, y): a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$. <fig16a> Då är

$$\iint_D f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

B) Om $D = \{(x, y): c \leqslant y \leqslant d, \alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y)\}$ <fig16b>. Då är

$$\iint_D f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Bevis som ovan: “skivformeln”: $A(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \,\mathrm{d}y$ är kontinuerlig.

6.12 $D: \left\{ \begin{smallmatrix} x^2 \leqslant y \leqslant 1 \\ x \geqslant 0 \end{smallmatrix} \right.$.

$$\iint_D \frac{x}{1 + y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = [A] = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \frac{x}{1 + y^2} \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \text{Do It!}$$

$$[B] = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} \frac{x}{1 + y^2} \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} \, \frac{1}{2} [x^2]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y}{1 + y^2} \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{4} [\ln(1 + y^2)]_0^1 = \frac{\ln 2}{4}$$

Regler (fås ur “gränsvärdesregler” eller regler för enkel integral).

Sats: $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrerbara på D, där D är mätbar.

1. Linearitet ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).

$$\iint_D (c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = c_1 \iint_D f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + c_2 \iint_D g(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

2. Om $D_1 \cap D_2$ är en nollmängd:

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f(x, y) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

3. $f \geqslant 0 \Rightarrow$

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant 0 \quad (\stackrel{\text{def}}{=} \text{ volymen av “kroppen under ytan } z = f(x, y)\text{”}$$

4. Triangelolikheten (följer ur motsvarande för summor):

$$\left| \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right| \leqslant \iint_D |f(x, y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

5. Variabelsubstitution:

Exempel på “koordinatbyte”: $\boldsymbol{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

A) Linjär transformation (basbyte): $(x, y) \mapsto (u, v)$ med $\begin{cases} u = a\,x + b\,y \\ v = c\,x + d\,y \end{cases}$. <fig17>.

$D\colon \begin{cases} 1 \leqslant a\,x + b\,y \leqslant 3 \\ 2 \leqslant c\,x + d\,y \leqslant 3 \end{cases}$ (parallellogram) avbildas på $D'\colon \begin{cases} 1 \leqslant u \leqslant 3 \\ 2 \leqslant v \leqslant 3 \end{cases}$.

B) Polär substitution: $(x, y) \mapsto (r, \varphi)$:

$$\boldsymbol{T}^{-1}\colon \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$D\colon 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$ avbildas på $D'\colon \begin{cases} 1 \leqslant r \leqslant 2 \\ 0 \leqslant \varphi < 2\,\pi \end{cases}$.

Arean av en parallellogram:

$$\text{arean} = \left| \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4} \right| = | \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix} |$$