## 2006–01–26

1) *Inversa funktionssatsen:* $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är $\mathcal{C}^1$ i en omgivning till $\boldsymbol{a}$:

Om $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}) \neq 0$ så är $\boldsymbol{f}$ bijektiv lokalt kring $\boldsymbol{a}$.

Exempel: (basbyte): <fig9>

$$\boldsymbol{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (u, v)$$

$$\begin{cases} u = a\,x + b\,y \\ v = c\,x + d\,y \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{T} \text{ bijektiv (lokalt i varje punkt)}$$

2) *Implicita funktionssatsen.*

**Problemställning:** Definierar en ekvation (ett implicit samband) en variabel som funktion av de övriga [“kan man lösa ut...”].

Exempel: a) $x\,y = 1$ ger funktionen $y = \frac{1}{x}$.

b) Ekvationen: $F(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. I punkter $(a, b)$ med $b \neq 0$ kan vi lösa ut: $y = \sqrt{1 - x^2}$ om $b > 0$ respektive $y = -\sqrt{1 - x^2}$ om $b < 0$. Men det går inte om $b = 0$ (t.ex. i $(1, 0)$), ty i varje omgivning finns det punkter $(1, y_1)$ och $(1, y_2)$ med $y_1 \neq y_2$.

Vad får inte hända? Jo, nivåkurvan får inte ha en lodrät tangent, dvs inte ha en normalvektor $(n_1, 0)$, dvs $F'_y \neq 0$ i punkten.

c) I $\mathbb{R}^3$: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (en sfär med radie 1).

I punkten $(a, b, c)$ med $c \neq 0$ definierar ekvationen $z$ som funktion $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ om $c > 0$ och $z(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ om $z < 0$. Men det går inte i punkter $(a, b, 0)$, ty i varje omgivning finns två punkter $(a, b, c_1)$ och $(a, b, c_2)$ med $c_1 \neq c_2$.

Det får inte finnas tangentplan $\perp$ $x$-$y$-planet, dvs normalvektorn $\neq (n_1, n_2, 0)$, dvs $F'_z \neq 0$.

Sats: (implicita funktionssatsen)

i $\mathbb{R}^2$: Om $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är $\mathcal{C}^1$ i en omgivning till $(a, b)$ och $F'_y(a, b) \neq 0$ så definierar ekvationen $F(x, y) = F(a, b)$, $y$ som en $\mathcal{C}^1$-funktion av $x$ lokalt kring $(a, b)$, dvs det finns en omgivning till $U$ till $(a, b)$ så att $U \cap \{\text{nivåkurvan } F(x, y) = F(a, b)\}$ är en funktionskurva $y = f(x)$. <fig10>.

$f'(x)$ fås genom att derivera $F(x, f(x)) = k$:

$$f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad \text{i } U$$

i $\mathbb{R}^3$: Om $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ är $\mathcal{C}^1$ i en omgivning till $(a, b, c)$ och $F'_z(a, b, c) \neq 0$, så definierar ekvationen $F(x, y, z) = F(a, b, c)$, $z$ som en $\mathcal{C}^1$-funktion av $(x, y)$ lokalt kring $(a, b, c)$, dvs det finns en omgivning $U$ till $(a, b, c)$ så att $U \cap \{\text{nivåytan } F(x, y, z) = F(a, b, c)\}$ är en funktionsyta $z = f(x, y)$. $f'_x$ och $f'_y$ fås genoma att derivera $F(x, y, f(x, y)) = k$.

**Bevis.** $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} u = x \\ v = F(x, y) \end{cases} : \quad \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ F'_x & F'_y \end{vmatrix} = F'_y \neq 0$$

inversa funktionssatsen ger: $\boldsymbol{T}\colon (x,y)\mapsto(u,v)$ är bijektiv lokalt i $(a,b)$. $\square$

**Bevis.** $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} u=x \\ v=y \\ w=F(x,y,z) \end{cases} : \quad \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ F'_x & F'_y & F'_z \end{vmatrix} = F'_z \neq 0$$

Inversa funktionssatsen ger att $(x,y,z)\mapsto(u,v,w)$ är bijektiv lokalt i $(a,b,c)$. $\square$

**Derivatorna** räknas så här (inte memorera resultatet). I $\mathbb{R}^2$:

$$(F(x,f(x)))' = F'_x\cdot 1 + F'_y\cdot f'(x) = 0 \Longrightarrow f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

I $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(F(x,y,f(x,y)) = F'_x\cdot 1 + F'_y\cdot 0 + F'_z\cdot f'_x \overset{!}{=} 0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$$

Analogt hanteras $\frac{\partial}{\partial y}$.

Exempel:

a) $F(x,y)=x^2+y^2=1$:

$$F'_y = 2\,y \text{ om } y\neq 0$$

ger $y=y(x)$ och

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

b) $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=1$: $F'_z=2\,z\neq 0$ om $z\neq 0$ ger

$$z=z(x,y) \quad z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{x}{z} \quad z'_y = -\frac{y}{z}$$

c) $F(x,y)=x^3+y^3-3\,x\,y$ (Descartes ögla, *folium Cartesii*, <fig11>).

$F(x,y)=0$.

$$F'_y = 3\,y^2-3\,x\neq 0 \quad \text{då } x\neq y^2$$

$$F(y^2,y) = y^6+y^3-3\,y^3 = y^3(y^3-2)$$

Problempunkter $(0,0)$ och $\left(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2}\right)$, i alla andra punkter är kurvan lokalt en funktionskurva.

**Integralkalkyl**

Igen: Vi motiverar allt geometriskt. *Problemställning*: Bestäm volymen av en kropp.

Vi utgår ifrån volymen av ett rätblock med sidlängderna $a,b$ och $h$: $V=a\cdot b\cdot h$.

Om "locket" är en funktionsyta $z=f(x,y)\geqslant 0$, då är kroppen $K=\{(x,y,z)\colon (x,y)\in D, 0\leqslant z\leqslant f(x,y)\}$, $D=\{(x,y)\colon a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$. <fig12>

För att få ett mått för $K$:s volym, $m(K)$, approximeras $K$ så här: sönderdela $D$:

$$D\colon \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b\colon & a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \\ c \leqslant y \leqslant d\colon & c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = d \end{cases}$$

ger delrektanglarna

$$D_{ik}\colon \begin{cases} x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i \\ y_{k-1} \leqslant y \leqslant y_k \end{cases}$$

arean $M(D_{ik}) = \Delta x_i \Delta y_k$ där $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

Om $f$ är kontinuerlig så antar $f$ på varje $D_{ik}$ (kompakt) ett minsta värde $m_{ik}$ och ett största värde $M_{ik}$, alltså om vi kan hitta ett vettigt mått $m(K)$ bör gälla:

$$s_{n,m} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} m_{ik} \Delta x_i \Delta y_k \leqslant m(K) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} M_{ik} \Delta x_i \Delta y_k = S_{n,m}$$

Vi kallar $s_{n,m}$ för en undersumma, $S_{n,m}$ för en översumma.

Definition: Om det finns precis ett tal $I$ som ligger mellan alla under- och översummor så kallas $f$ **(Riemann-)integrerbar över** $D$, och vi skriver

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Sats: Om $f$ är kontinuerlig på $D$ så är $f$ integrerbar: undersummor och översummor konvergerar mot talet $I$, ja, varje Riemannsumma $\sigma_{s,n}$ konvergerar mot $I$:

$$\sigma_{s,n} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} f(\xi_i, \eta_k) \Delta x_i \Delta y_k \underset{\max\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0}{\longrightarrow} \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I$$

$(\xi_i, \eta_k) \in D_{i,k}$ (godtyckligt valt). $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ kallas diameter av $D_{i,k}$.

**Bevis.** $s_{n,m}$ växande begränsad uppåt (av varje $S_{n,m}$): Det finns supremum $I_2$.

$S_{n,m}$ avtagande, begränsad nedåt (av varje $s_{n,m}$): Det finns infimum $I_1$.

$$I_2 \leqslant I_1$$

Att visa: $I_1 = I_2$.

$$S_{n,m} - s_{n,m} = \sum \sum (M_{i,k} - m_{i,k}) \Delta x_i \Delta y_k \longrightarrow 0 \quad \text{då } \max \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$$

$M_{i,k} - m_{i,k} < \varepsilon$.

$$S_{n,m} - s_{n,m} < \varepsilon \sum \sum \Delta x_i \Delta y_k = \varepsilon m(D)$$

ty $f$ är *likformigt* kontinuerlig på $D$ (D kompakt). Alltså $I_1 = I_2$.

Då går även $\sigma_{n,m}$ mot $I$ enligt instängningslagen. □