2006–01–25

$$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

Jacobi-matris: $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$, i rad i kolonn k: $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{a})$.

Då $m = n$ finns Jacobidetermninanten: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}) = \frac{\mathrm{d}(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\mathrm{d}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$.

Exempel:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &(x, y) \mapsto (r, \varphi) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \quad (\text{där } x > 0).$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{T}^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &(r, \varphi) \mapsto (x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{aligned}$$

Polära koordinater.

$$\boldsymbol{T}'(x, y) = \frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} r'_x & r'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}(r, \varphi)}{\mathrm{d}(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}(x, y)}{\mathrm{d}(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Detta sista är ett ***viktigt resultat***.

Allt blir enkelt då man räknar med $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$, som i envariablefallet. ($\boldsymbol{a}$ i stället för a, $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ i stället för $f'(a)$).

1. Differentierbarhet

   Att $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är differentierbar i $\boldsymbol{a}$ innebär att alla f_k är differentierbara i $\boldsymbol{a}$, dvs för alla $k = 1, \ldots, n$ gäller:

   $$f_k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f_k(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} + |\boldsymbol{h}|\rho_k(\boldsymbol{h}) \quad \text{där} \quad \rho_k(\boldsymbol{h}) \to 0 \quad \text{då} \quad \boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$$

   Skriv upp alla dessa n ekvationer som ett ekvationssystem:

   $$\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f_1(\boldsymbol{a}) \\ f_2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f_2(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ f_n(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f_n(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + |\boldsymbol{h}| \begin{pmatrix} \rho_1(\boldsymbol{h}) \\ \rho_2(\boldsymbol{h}) \\ \vdots \\ \rho_n(\boldsymbol{h}) \end{pmatrix}$$

   Med annan notation:

   $$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} + |\boldsymbol{h}|\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{h}) \quad \text{där } \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{h}) \to \boldsymbol{0} \text{ då } \boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{f}$ är differentierbar i $\boldsymbol{a}$ om detta gäller, dvs $\boldsymbol{f}$ approximeras av avbildningen

$$\boldsymbol{h} \mapsto \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h}$$

så bra att $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{h}) = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h}}{|\boldsymbol{h}|} \to 0$ då $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$.

DEFINITION: (2.7 och 3.2) Om $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är differentierbar i $\boldsymbol{a}$ så kallas den linjära avbildningen

$$\begin{gathered} \mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{h} \mapsto \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} \end{gathered}$$

för **differentialen till $\boldsymbol{f}$** i punkten $\boldsymbol{a}$ (eller totala derivatan av $\boldsymbol{f}$ i $\boldsymbol{a}$).

EXEMPEL: $m = n = 1$:

$$\mathrm{d}f(a)\colon h \mapsto f'(a) \cdot h \quad \text{(ger tangent)}$$

$n = 1$:

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})\colon \boldsymbol{h} \mapsto \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} \quad \text{(om } m = 2\text{: tangentplan)}$$

SPECIELLT EXEMPEL: Funktionen

$$\begin{gathered} g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{gathered}$$

är $\mathcal{C}^1$, dess differential $\mathrm{d}g(x)\colon h \mapsto g'(x) \cdot h = h$. $\mathrm{d}x(h) = 1 \cdot h$. Vi skriver alltså (utan argument: $h = \mathrm{d}x$ och $\mathrm{d}f = f'\mathrm{d}x$.

$$f(x, y)\colon \mathrm{d}f = f'_x \mathrm{d}x + f'_y \mathrm{d}y$$

(så kallad differentialform)

2. Kedjeregeln

$$\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$$

$$\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$$

$V_{\boldsymbol{g}} \subseteq D_{\boldsymbol{f}}$, $\boldsymbol{g}$ och $\boldsymbol{f}$ är differentierbara (i $\boldsymbol{a}$ respektive $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$).

Då är $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))$ differentierbar (i $\boldsymbol{a}$), med

$$\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})) \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{a}) \quad \text{(matrismultiplikation)}$$

dvs Jacobimatrisen till $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g} =$ Jacobimatris till $\boldsymbol{f}$ gånger Jacobimatris till $\boldsymbol{g}$.

a)

$$(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})))' = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})) \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{t})$$

b) Om $p = m = n$:

$$\det\big((\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'\big) = \det(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}))) \cdot \det(\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{t}))$$

Om $\boldsymbol{f}$ är injektiv så är $\boldsymbol{f}^{-1}$ differentierbar med

$$\left(\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}))\right)' = (\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{t}))^{-1}$$

dvs Jacobimatrisen till $\boldsymbol{f}^{-1}$ är den till Jacobimatrisen till $\boldsymbol{f}$ inversa matrisen.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}^{-1}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a})} \quad (\text{om } \neq 0)$$

a) Skriv $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$. Då blir

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{t}} = \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{t}}$$

b) Med $m = p = n$:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}$$

Observera vilken punkt man sätter in i funktionen.

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}^{-1}}{\partial \boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{-1}$$

Bevis. a) Kedjeregeln (för varje koordinatfunktion).

b) $\det(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$

Kedjeregeln och inversa funktionssatsen...

Utförligt (repetition) för $m = n = p = 2$

$$\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$$

$$\boldsymbol{g}(u, v) = (x, y)$$

$$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$$

$$\boldsymbol{h}(u, v) = (f_1(x(u, v), y(u, v)), f_2(x(u, v), y(u, v))$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

(Mycket bra matematisk motivering för definitionen av matrismultiplikation.)

Exempel: kolla:

$$\frac{\mathrm{d}(x, y)}{\mathrm{d}(r, \varphi)} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}(r, \varphi)}{\mathrm{d}(x, y)}} = r$$

$\square$

Nu har vi två satser kvar:

1. Problemställning: Är $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv, åtminstone lokalt:

Kom ihåg: $f: X \to Y$ (X och Y är mängder, t.ex. $\mathbb{R}^n$).

- f är injektiv om $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ med $x_1, x_2 \in D_f$.
- f är surjektiv om $Y = V_f$
- f är bijektiv om $D_f = X$ och $V_f = Y$ och f är injektiv.

SATS: (Inversa fuktionssatsen) Förutsättningar:

- $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är $\mathcal{C}^1$ i en omgivning Ω till $\boldsymbol{a}$.
- $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}) \neq 0$

Påstående: Det finns en omgivning U till $\boldsymbol{a}$ och en omgivning V till $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ så att

$$\boldsymbol{f}|_U: U \to V$$

är bijektiv och $(f|_U)^{-1}$ är $\mathcal{C}^1$. Kort: då är $\boldsymbol{f}$ lokalt i $\boldsymbol{a}$ bijektiv. <fig8>

Vi skriver ofta $\boldsymbol{f}$ i stället för "restriktionen av $\boldsymbol{f}$ på U" ($\boldsymbol{f}|_U$).

Bevis. (Eller i alla fall nästan en bevisidé).

$\boldsymbol{f}$ approximeras av den linjära avbildningen $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$: $\boldsymbol{h} \mapsto \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h}$ (så bra att...) men för linjär avbildning vet man $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ är entydigt lösbart om och endast om det $A \neq 0$. Då borde väl även $\boldsymbol{f}$ vara injektiv (nära $\boldsymbol{a}$). $\mathcal{C}^1$ följer av kedjeregeln. □

EXEMPEL: Polär substitution lokalt bijektiv i varje punkt $(a, b) \neq (0, 0)$ ty

$$\frac{\mathrm{d}(r, \varphi)}{\mathrm{d}(x, y)} = \frac{1}{r} \neq 0 \quad \text{då } (a, b) \neq (0, 0)$$

EXEMPEL:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (u, v, w) \end{gathered}$$

$$\begin{cases} u = x + y + z \\ v = x - y + z \\ w = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}(u, v, w)}{\mathrm{d}(x, y, z)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ x & y & z - x \end{vmatrix} = -4(z - x)$$

Svar: Lokalt i varje punkt (a, b, c) med $a \neq c$ är $\boldsymbol{T}$ bijektiv, dvs u, v, w duger som nya variabler. (Omvändningen gäller inte.)