2006–01–23

Repetition Kvadratisk form: $Q(h,k) = A\,h^2 + 2\,B\,h\cdot k + C\,k^2$, allmänt:

$$Q\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_p) \mapsto Q(\boldsymbol{h}) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} A_{jk} h_j h_k$$

Kan vara:

1. Positivt definit om $Q(\boldsymbol{h}) > 0$ för alla $\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$.
2. Negativt definit om $Q(\boldsymbol{h}) < 0$ för alla $\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$.
3. Indefinit om det finns $\boldsymbol{h}_1$ och $\boldsymbol{h}_2$ så att $Q(\boldsymbol{h}_1) > 0$ och $Q(\boldsymbol{h}_2) < 0$.
4. Semidefinit: om olikheterna inte gäller strängt.

SATS: För en kvadratisk form $Q\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ gäller

$$Q(t\,\boldsymbol{h}) = t^2\,Q(\boldsymbol{h})$$

["Q är homogen av ordning två"]

Bevis. Framgår uppenbart av definitionen. □

Ett tillräckligt (men ej nödvändigt) villkor för att en stationär punkt ska vara max-, min- eller sadelpunkt:

SATS: Förutsättningar: $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är $\mathcal{C}^3$ i en omgivning till (a,b); (a,b) är en stationär punkt; $Q(h,k) = f''_{xx}(a,b)\,h^2 + 2 f''_{xy}(a,b)\,h\,k + f''_{yy}(a,b)\,k^2$.

PÅSTÅENDE:

- Q positivt definit $\Longrightarrow$ (a,b) är en sträng lokal minimipunkt.
- Q negativt definit $\Longrightarrow$ (a,b) är en sträng lokal minimipunkt.
- Q indefinit $\Longrightarrow$ (a,b) är en sadelpunkt.

Bevis. (Taylor):

$$f(x,y) - f(a,b) = \frac{1}{2} Q(h,k) + \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3 B(h,k)$$

Observera $f'_x = f'_y = 0$ i (a,b). Man kan eventuellt istället för $B(h,k)$ välja $B(x,y)$. $h = x - a$.

B är begränsad, så den termen går mot noll mycket snabbare än Q-termen. Därför avgör Q-termen vänsterledets tecken för små h,k.

Om Q är positivt definit, så antar Q på $S\colon x^2+y^2=1$ ett minsta värde δ, ty Q är kontinuerlig och S är kompakt, dvs $\exists (h_0,k_0)\colon h_0^2+k_0^2=1$ så att $0 < \delta = Q(h_0,k_0) \leqslant Q(h,k)$ (ty $\neq \boldsymbol{0}$ och positivt definit) för alla $(h,k) \in S$. Då gäller för godtyckligt $(h,k) \neq (0,0)$:

$$Q\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) = [\text{homogen av ordning } 2] = \frac{1}{h^2+k^2} Q(h,k) \geqslant \delta$$

Brun vektor ligger på sfären S.

$$\Longrightarrow f(x,y)-f(a,b) \geqslant \frac{1}{2}(h^2+k^2)\,\delta + \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3 B(h,k) =$$

$$= (h^2+k^2)\left(\frac{\delta}{2} + \sqrt{h^2+k^2}\,B(h,k)\right)$$

$\sqrt{h^2+k^2}\,B(h,k) \to 0$ då $(h,k)\to(0,0)$, dvs det finns ε så att

$$\left|\sqrt{h^2+k^2}\,B(h,k)\right| < \frac{\delta}{4}$$

för $h^2+k^2<\varepsilon^2$.

Alltså gäller för alla $(x,y)\neq(a,b)$ med $(x-a)^2+(y-b)^2<\varepsilon^2$:

$$f(x,y)-f(a,b)>0$$

dvs (a,b) är en sträng lokal **minimipunkt.** $\square$

(Kontinuerlig funktion på kompakt mängd antar max/min).

Om Q är negativt definit: visa att Q antar största värde $\delta<0$, fortsätt analogt som ovan. Indefinit...

Exempel: Bestäm alla stationära punkter och avgör deras karaktär.

a) $f(x,y)=x^3+3\,x\,y^2-15\,x-12\,y$

b) $f(x,y)=(x-y)^2+y^3$

c) Övning 91.

Lösning:

a) Funktionen är $\mathcal{C}^3$:

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2+3y^2-15 \overset{!}{=} 0 \\ f'_y = 6\,x\,y-12 \overset{!}{=} 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 2\,x\,y=4 \end{cases} \Longrightarrow (x-y)^2=1$$

Fall 1: $x-y=1$:

$$x\cdot(x-1)-2 = x^2-x-2 = (x-2)(x+1) \overset{!}{=} 0$$

Stationära punkter: $(2,1)$, $(-1,-2)$.

Fall 2: $x-y=-1$:

$$x\cdot(x+1)-2 = x^2+x-2 = (x+2)(x-1) = 0$$

Stationära punkter: $(1,2)$ och $(-2,-1)$.

Avgör deras typ: Beräkna $Q(h,k)=f''_{xx}(a,b)\,h^2+2\,f''_{xy}(a,b)\,h\cdot k+f''_{yy}(a,b)\,k^2$ i dessa punkter.

$$\begin{cases} f''_{xx}=6x \\ f''_{xy}=6y \\ f''_{yy}=6x \end{cases}$$

punkter:	(2,1)	(-1,-2)	(1,2)	(-2,-1)
f''_{xx}	12	-6	6	-12
f''_{xy}	6	-12	12	-6
f''_{yy}	12	-6	6	-12

Alltså i $(2,1)$:

$$Q(h,k) = \cdots = 12\left(\left(h+\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right)$$

positivt definit: **minimipunkt**.

Alltså i $(-1,-2)$:

$$Q(h,k) = -6h^2 - 24\,h\,k - 6k^2 = -6(h^2 + 4\,h\,k + k^2) = -6\left((h+2k)^2 - 3k^2\right)$$

indefinit (t.ex. $Q(0,1) > 0$, $Q(1,0) < 0$, skriv helst upp två punkter): **sadelpunkt**.

Alltså i $(1,2)$:

$$Q(h,k) = 6h^2 + 24h\,k + 6k^2 = \cdots = 6\left((h+2k)^2 - 3k^2\right)$$

indefinit: **sadelpunkt**.

I $(-2,-1)$:

$$Q(h,k) = -12h^2 - 12h\,k - 12k^2 = -12\left(\left(h+\frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right)$$

negativt definit, **maximipunkt**.

b)

$$f'_x = 2(x-y) = 0$$

$$f'_y = -2(x-y) + 3y^2 = 0$$

$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$. Enda stationära punkten.

$$f(x,y) = x^2 - 2x\,y + y^2 + y^3:$$

$$Q(h,k) = 2\left(h^2 - 2\,h\,k + k^2\right) = 2(h-k)^2 \geqslant 0$$

Positivt *semi*definit. Satsen, kriteriet ger inget.

$$f(x,y) = (x-y)^2 + y^3$$

$$f(0,0) = 0$$

$(0,0)$ är en sadelpunkt, ty i varje omgivning: $x^2 + y^2 < \varepsilon^2$ finns $\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ med $f\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3 > 0$ och $\left(-\frac{\varepsilon}{2}, -\frac{\varepsilon}{2}\right)$ med $f\left(-\frac{\varepsilon}{2}, -\frac{\varepsilon}{2}\right) = -\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3 < 0$.

Fält

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (y_1, \ldots, y_n) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x}))$$

Vad är deriverbarhetsbegreppet för fält? $\boldsymbol{f}$ är entydigt bestämd av sina koordinatfunktioner.

DEFINITION: $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är partiellt deriverbar i $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$ [dvs: varje koordinatfunktion är partiellt dervierbar i $\boldsymbol{a}$] Då kallas:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(\boldsymbol{a}) \\ \operatorname{grad} f_2(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_n(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

funktionalmatris (Jacobi-matris) till $\boldsymbol{f}$ i punkten $\boldsymbol{a}$.

|||.

DEFINITION:Om $m = n$ kallas

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}(f_1, \ldots, f_n)}{\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n)} = \det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$$

funktionaldeterminant (Jacobi-determinant).

|||.

EXEMPEL. $m = n = 1$.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = [f'(a)]\colon\quad 1 \times 1\text{-matris} = \text{tal} = \text{determinant}$$

$n = 1$:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} f'_{x_1}(\boldsymbol{a}) & f'_{x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & f'_{x_m}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})$$

...radvektor.

$m = 1$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}(t_0) = \begin{pmatrix} f'_1(t_0) \\ f'_2(t_0) \\ \vdots \\ f'_n(t_0) \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}'(t_0) = \text{tangentvektor}$$

...kolonnvektor.