2006–01–19

grad $f=(f'_x, f'_y, \ldots)$. $\mathbb{R}^2$: grad $f \perp$nivåkurvor, $\mathbb{R}^3$: grad $f \perp$nivåyta.

Funktionsvärdena växer snabbast i riktningen grad $f(\boldsymbol{a})$, nämligen $|\text{grad } f(\boldsymbol{a})|$.

Bevis. "relativa förändringen i riktningen $\boldsymbol{v}$" ($|\boldsymbol{v}|=1$)

$$f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \text{grad } f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v} = |\text{grad } f(\boldsymbol{a})| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \cos\varphi$$

där φ är vinkeln mellan grad $f(\boldsymbol{a})$ och $\boldsymbol{v}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$:

störst $\iff \cos\varphi = 1 \iff \varphi = 0$, minst $\iff \cos\varphi = -1 \iff \varphi = \pi$. □

Anmärkning: ($\mathbb{R}^3$) grad $F(\boldsymbol{a}) \perp$ nivåytan $F(x,y,z) = F(a,b,c)$. Alltså är graf $F(\boldsymbol{a})$ normalvektorn till ytan i $\boldsymbol{a}$.

Exempel: $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = R^2$

Ett plan med normal $\boldsymbol{N}$ har ekvation $\boldsymbol{N} \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = 0$ <fig4>. Tangentplan:

$$\text{grad } F(a,b,c) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0$$

Speciellt: En funktionsyta $z = f(x,y)$ kan betraktas som nivåytan $F(x,y,z) = f(x,y) - z \equiv 0$. Alltså är tangentplanet

$$F'_x \cdot (x-a) + F'_y \cdot (y-b) + F'_z \cdot (z-c) = 0$$

$$f'_x(a,b)\,(x-a) + f'_y(a,b)\,(y-b) - 1(z - f(a,b)) = 0$$

Se även <fig 5>.

Sats: Om $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ är $\mathcal{C}^m$ i en öppen mängd D så gäller för de partiella derivatorna till och med ordningen m: det spelar ingen roll i vilken ordning vi deriverar.

Exempel: $\mathbb{R}^3, \mathcal{C}^3$: $((f'_x)'_y)'_y = f'''_{yxy} = f'''_{yyx}$

Bevis. "repetition": se beviset av "$\mathcal{C}^1 \Rightarrow$ differentierbar". □

Lokala extrempunkter:

Definition: $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^p$: Vi säger

1. f antar i $\boldsymbol{a}$ ett **största / minsta värde** om $f(\boldsymbol{a}) \gtreqless f(\boldsymbol{x})$ för alla $\boldsymbol{x} \in D_f$.

2. f antar i $\boldsymbol{a}$ ett **lokalt maximum / lokalt minimum** om det finns en omgivning U till $\boldsymbol{a}$ så att $f(\boldsymbol{a}) \gtreqless f(\boldsymbol{x})$ för alla $\boldsymbol{x} \in D_f \cap U$.

$\boldsymbol{a}$ kallas då (lokal) maximipunkt/minimipunkt=(lokal) extrempunkt, $f(\boldsymbol{a})$ kallas extremvärde.

|||.

Hur hittar man (lokala) extrempunkter, hur avgör man deras karaktär?

$p=1$: $f'(a)=0$ nödvändigt villkor (om f är deriverbar).

För $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$: $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.

SATS: (Tentauppgift)

Förutsättning: $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ antar i $\boldsymbol{a}$ ett lokalt extremvärde. f är partiellt deriverbar i $\boldsymbol{a}$.

Påstående: $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.

Bevis. (för $p = 2$, $\boldsymbol{a} = (a, b)$). Funktioner $\begin{array}{l} g(x) = f(x, b) \\ h(y) = f(a, y) \end{array}$ antar ett lokalt extremvärde i $\begin{array}{l} a \\ b \end{array}$, alltså $\begin{array}{l} g'(a) = 0 = f'_x(a, b) \\ h'(b) = 0 = f'_y(a, b) \end{array}$. $\square$

Obs: nödvändigt, ej tillräckligt villkor:

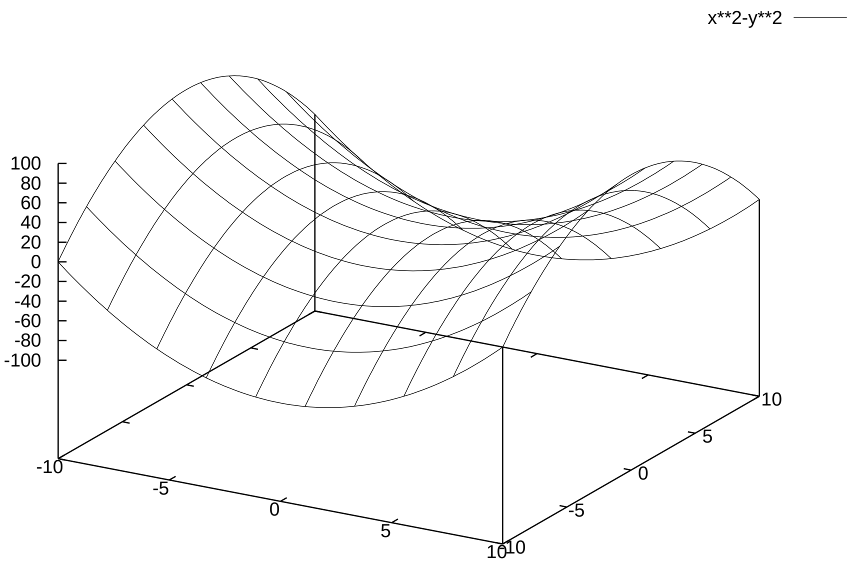
EXEMPEL: $f(x, y) = x^2 - y^2$: $\operatorname{grad} f = (2x, -2y) = (0, 0)$ i $(0, 0)$, men $(0, 0)$ är varken lokal maximi- eller lokal minimipunkt, ty: i **varje** omgivning U_ε: $x^2 + y^2 < \varepsilon^2$ finns punkter, t.ex. <fig6> $\left(\frac{\varepsilon}{2}, 0\right)$resp $\left(0, -\frac{\varepsilon}{2}\right)$ där

$$f\left(\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 > 0 = f(0, 0)$$

$$f\left(0, -\frac{\varepsilon}{2}\right) = -\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 < 0 = f(0, 0)$$

DEFINITION: $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. En punkt $\boldsymbol{a}$ som inte är lokal extrempunkt men i vilken $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ kallas **sadelpunkt**. En punkt i vilken $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ kallas **stationär (kritisk)**.

|||.



Figur 1. Exempel på sadelpunkt.

Hur kan man avgöra typen (karaktären) av en stationär punkt? Titta på högre derivator: "Taylor".

SATS: Förutsättning: $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \mathcal{C}^3$ i en omgivning U till (a, b).

Påstående: För $(x, y) \in U$ gäller:

$$f(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) + \frac{1}{2!}\{f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\} + \left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)^3 B(x,y) \quad \text{där } B \text{ är begränsad}$$

Bevis. (Tentauppgift) <fig7>

Betrakta $F(t) = f(a+th, b+tk)$ ("räkna ut f på sträckan γ, $0 \xrightarrow{t} 1$"). F är C^3 på ett öppet intervall $I \supset [0,1]$, F:s Maclaurinutveckling:

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(0)t^2 + \frac{1}{3!}F'''(\tau)t^3$$

med τ mellan 0 och t. Speciellt för $t = 1$:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \frac{1}{6}F'''(\tau)$$

Kedjeregeln:

$$f(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k +$$

$$+\frac{1}{2}\left(f''_{xx}(a,b)h^2 + f''_{xy}(a,b)\,h\,k + f''_{yx}(a,b)kh + f''_{yy}(a,b)k^2\right) +$$

$$+\frac{1}{6}\left(f'''_{xxx}(\xi,\eta)h^2h + f'''_{xxy}(\xi,\eta)h^2k + 2f'''_{xyx}(\xi,\eta)h^2k + 2f'''_{xyy}(\xi,\eta)k^2\,h + f'''_{yyy}(\xi,\eta)k^3\right) =$$

$$= \cdots + \left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)^3 \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{h^3}{\sqrt{\cdots}^3}f'''_{xxx}(\xi,\eta) + \frac{3h^2k}{\sqrt{\cdots}^3}f'''_{xxy}(\xi,\eta) + \cdots + \frac{k^3}{\sqrt{\cdots}^3}f'''_{yyy}(\xi,\eta)\right) =$$

$$= \cdots + \sqrt{\cdots}^3\, B(x,y)$$

B är begränsad i någon omgifning till (a,b), ty f'''_{xxx}, f'''_{xyy}, ... är begränsade (ty kontinuerliga!) och $|h| \leqslant \sqrt{h^2+k^2}$, $|k| \leqslant \sqrt{h^2+k^2} \Longrightarrow \left|\frac{h^3}{\sqrt{\cdots}^3}\right| \leqslant 1$, $\left|\frac{3h^2k}{\sqrt{\cdots}^3}\right| \leqslant 3$ osv.

Analogt till högre dimensioner, analogt till högre ordning. □

BERÄKNING: Utnyttja envariabelutvecklingar: Exempel:

Utveckla (kring $(0,0)$) $f(x,y) = e^x \sin y$ till och med ordning 3.

Lösning:

$$f(x,y) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 B_1(x)\right)\left(y - \frac{y^3}{6} + y^5 B_2(y)\right) =$$

$$= y + xy + \frac{1}{2}x^2 y - \frac{y^3}{6} + R_4(x,y)$$