2006–01–18

Repetition $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_i + \Delta x_i, \ldots, a_p) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_p)}{\Delta x_i}$$

f differentierbar i $\boldsymbol{a}$ om

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = f'_{x_1}(\boldsymbol{a})(x_1 - x_a) + \cdots + f'_{x_i}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i) + \cdots + f'_{x_p}(\boldsymbol{a})(x_p - a_p) + |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|\rho(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$$

Sats: (Tentauppgift) Om f är differentierbar i $\boldsymbol{a}$ så är f kontinuerlig i $\boldsymbol{a}$.

Bevis. $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) \to 0$ då $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$ □

Omvändingen gäller ej: Ex:

a) $f(x, y) = |x| + |y|$ är kontinuerlig i $(0, 0)$ men inte ens partiellt deriverbar i $(0, 0)$ — Visa det!

b) !

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f är partiellt deriverbar, kontinuerlig men inte differentierbar i $(0, 0)$. (Demonstreras torsdag, Do It!, övningstenta)

$\begin{matrix} \boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (u, v) \mapsto (x, y) \end{matrix}$ där $x(u, v)$ och $y(u, v)$ är differentierbara.

$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $h(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$. Man skriver ofta $\frac{\partial f}{\partial u}$ när man menar $\frac{\partial h}{\partial u}$.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

Men det vanliga är: $\boldsymbol{g}$ är bijektiv (lokalt): $\boldsymbol{g}^{-1}\colon (x, y) \mapsto (u, v)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Typexempel polära koordinater:

$$(r, \varphi) \mapsto (x, y)\colon \begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix}$$

$$(x, y) \mapsto (r, \varphi)\colon \begin{matrix} r & = & \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi & = & \arctan\frac{y}{x}, \text{ t.ex. i } x > 0 \end{matrix}$$

"Repetition"

DEFINITION: "**$\mathcal{C}^m$-fält**", $m \in \mathbb{N}$

1. $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ är $\mathcal{C}^m$ i $D \subseteq \mathbb{R}^p$ om alla partiella derivator till och med ordning m är kontinuerliga i D (som därmed måste vara en öppen mängd).

2. Ett fält $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n): \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ är $\mathcal{C}^m$ i D om alla koordinatfunktioner $f_1, f_2, \ldots, f_n$ är $\mathcal{C}^m$ i D.

ANMÄRKNING: Om $f_x', f_y', \ldots$ existerar så skriver vi:

$$(f_x')_x' = f_{xx}'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x')_y' = f_{xy}'' = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$(f_y')_x' = f_{yx}'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

De sista båda är för det mesta lika.

Den viktigaste klassen av differentierbara funktioner är $\mathcal{C}^1$-funktionerna:

SATS: Om $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ är $\mathcal{C}^1$ så är f differentierbar i $D \subseteq \mathbb{R}^p$. (omvändningen gäller *inte*)

Bevis. (Tentauppgift) Visar för $p = 2$.

För $\boldsymbol{a} = (a, b) \in D$ finns $B_\delta(a, b) = \{(x, y): |(x, y) - (a, b)| < \delta\} \subseteq D$. h och k är så små att $(a + h, b + k) \in B_\delta(a, b)$. Då

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) \overset{\text{dela upp i differensen}}{\underset{\text{i } x\text{-led och } y\text{-led}}{=}} f(a + h, b + k) - f(a, b + k) + f(a, b + k) - f(a, b) =$$

$$= [\text{Medelvärdessatsen}] = f_x'(\xi, b + k)\, h + f_y'(a, \eta) k =$$

(ξ ligger mellan a och $a + h$; η ligger mellan b och $b + k$. Ty $\mathcal{C}^1$:)

$$= (f_x'(a, b) + \rho_1(h))h + (f_y'(a, b) + \rho_2(k))k =$$

$$= f_x'(a, b)\, h + f_y'(a, b) k + h\rho_1(h) + k\rho_2(k) =$$

$$= f_x'(a, b) h + f_y'(a, b) k + \sqrt{h^2 + k^2}\, \rho(h, k) \text{ där } \rho(h, k) \to 0 \text{ då } (h, k) \to (0, 0)$$

(Närmare bestämt $\rho(h, k) = \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}\rho_1(h) + \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}\rho_2(k) \to 0$, ty $\left|\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right| \leqslant 1$). □

En viktig vektor, differentialoperator

DEFINITION: $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, f partiellt deriverbar i $\boldsymbol{a}$, då är

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \left(f_{x_1}'(\boldsymbol{a}), f_{x_2}'(\boldsymbol{a}), \ldots, f_{x_p}'(\boldsymbol{a})\right)$$

gradienten till f i $\boldsymbol{a}$.

|||.

Anmärkning: Differentialoperatorn grad $= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right)$: $f \mapsto \operatorname{grad} f$ generaliserar deriveringsoperatorn D: $f \mapsto f'$. Vi skall se att denna är den "rätta" generaliseringen. $||$.

Till exempel:

Kedjeregeln blir "naturlig": $h(t) = f(\boldsymbol{r}(t))$ ger (i godtycklig dimension).

$$h'(t) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)$$

Differentierbarhet blir "enkel":

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} + |\boldsymbol{h}|\rho(\boldsymbol{h}) \text{ där } \rho(\boldsymbol{h}) \to 0 \text{ då } \boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$$

Derivering i en godtycklig riktning $\boldsymbol{v}$. <fig3> dvs då (x, y) varierar längs linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

med $|\boldsymbol{v}| = 1$ då är $|t|$ avståndet mellan (x, y) och (a, b).

Definition: $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$: $\boldsymbol{a}$ inre punkt i D_f, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^p$ med $|\boldsymbol{v}| = 1$. Om

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t} = f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a})$$

existerar så kallas det **riktningsderivatan av f** i $\boldsymbol{a}$ i riktningen $\boldsymbol{v}$.

$|||$.

Anmärkning: $f'_x = f'_{(1,0)}$; $f'_y = f'_{(0,1)}$; $f'_{-\boldsymbol{v}} = -f'_{\boldsymbol{v}}$ (Visa dessa!) $||$.

Fler egenskaper av grad.

Sats: Om $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ är differentierbar i $\boldsymbol{a}$, $|\boldsymbol{v}| = 1$ $(\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^p)$ så är

$$f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v}$$

Bevis. (Tentauppgift)

$$\frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t} \underset{\text{diff.-bar}}{\overset{f \text{ är}}{=}} \frac{\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot (t\boldsymbol{v}) + |t\boldsymbol{v}|\rho(t\boldsymbol{v})}{t} =$$

$$= \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v} \pm \rho(t\boldsymbol{v}) \to \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v} \text{ då } t \to 0$$

□

Sats: $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, f är C^1 i $D \subseteq \mathbb{R}^p$.

1. Om $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ för $\boldsymbol{a} \in D$ och D är bågvis sammanhängande: då är f konstant i D.
2. $\operatorname{grad} f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ är ett normalfält. (I $\mathbb{R}^2$: $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \perp$nivåkurva $f(x, y) = f(\boldsymbol{a})$, i $\mathbb{R}^3$: $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \perp$nivåyta $f(x, y, z) = f(\boldsymbol{a})$.
3. I riktingen $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})$ växer funktionsvärdena snabbast.

   I riktingen $-\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})$ avtar funktionsvärdena snabbast.

Bevis. (Tentauppgift)

1) $\boldsymbol{a} \in D$, till varje $\boldsymbol{b} \in D$ finns en $\mathcal{C}^1$-kurva från $\boldsymbol{a}$ till $\boldsymbol{b}$ som ligger i D (D är öppen). Det vill säga

$$C\colon \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \alpha \xrightarrow{t} \beta, \boldsymbol{r}(\alpha) = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}(\beta) = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r}(t) \in D$$

då gäller för $h(t) = f(\boldsymbol{r}(t))$: $h'(\boldsymbol{r}(t)) = \text{grad } f(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) = \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{r}'(t) = 0 \Longrightarrow h$ är konstant, dvs $h(\alpha) = h(\beta)$, $f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{b})$.

2) Låt C: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ vara en $\mathcal{C}^1$-parameterisering av nivåkurvan $f(x, y) = f(a, b)$. Då är $h(t) = f(x(t), y(t))$ konstant $\Rightarrow h'(t) = \text{grad } f(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) = 0$, dvs grad $f \perp \boldsymbol{r}'$.

$\square$