2006–01–16

Flervariabelanalys: differential-, integralkalkyl för funktioner ("fält") $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. [arbete, potential, divergens, rotation...]

Nödvändiga förkunskaper: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$. $\mathbb{R}^2 =$ planet, $\mathbb{R}^3 =$ rummet: tänk på geometriska **vektorer**. Viktiga begrepp: längd $|\boldsymbol{x}|$, avstånd $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$.

Inre punkt, randpunkt, öppen mängd, sluten mängd (komplementet till en öppen mängd), kompakt mängd (sluten begränsad mängd).

$$\lim_{\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}$$

Vad är motsvarigheten till "derivata"? Motivering för $f\colon \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) inre punkt i D_f. <fig1>.

Håll $y = b$ fixt, då fås funktionen $g\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, b)$.

Håll $x = a$ fixt, då fås funktionen $h\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto f(a, y)$.

Om $g'(a)$, resp $h'(b)$ existerar, så är dessa tal ett mått för den relativa förändringen av funktionsvärdena då (x, y) rör sig längs linjen (x, b) resp. (a, y).

DEFINITION: $f\colon \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kallas **partiellt deriverbar** i (a, b) *om* (a, b) är en inre punkt i D_f och

$$(g'(a)) \qquad \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x} = f_x'(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

existerar **<u>och</u>**

$$\exists \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y} = f_y'(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

(Läs: den pertiella derivatan av f med avseende på x resp. y i punkten (a, b))

|||.

Om f_x', f_y' existerar i varje punkt $(x, y) \in D$ så kallas funktionerna $f_x'\colon (x, y) \mapsto f_x'(x, y)$ och $f_y'\colon (x, y) \mapsto f_y'(x, y)$ för "de partiella derivatorna" av f med avseende på x respektive y. ($D_{f_x'} = D_{f_y'} = D$)

Var noggran att skriva $\frac{\partial f}{\partial x}$, inte $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. ∂ är en egen symbol, ej δ eller dylikt. Analogt $\frac{\partial f}{\partial x_m}$ för funktioner i flera variabler.

Exempel. a) $f(x, y) = \mathrm{e}^x \cos(x\, y)$

$$f_x' = \mathrm{e}^x \cos(x\, y) + \mathrm{e}^x(-\sin(x\, y)\, y)$$

$$f_y' = -\mathrm{e}^x \sin(x\, y)\, x$$

b) **!**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x\, y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f är partiellt deriverbar i $(0,0)$, ty

$$\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\frac{0-0}{\Delta x}=0\to 0 \text{ då } \Delta x\to 0$$

$$\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\frac{0-0}{\Delta y}=0\to 0 \text{ då } \Delta y\to 0$$

Alltså: $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$ **men** f är ej kontinuerlig i (0,0), ty

$$f(x,x)=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}\neq 0 \text{ då } (x,x)\to(0,0)$$

Exemplet visar det otympliga i partiell derivata som generalisering av ordinär derivata till flera variabler. Partiellt deriverbar "är inte det rätta deriverbarhetsbegreppet".

För att hitta det "rätta" begreppet: titta på $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: f är deriverbar i a om a är en inre punkt i D_f och

$$\rho(\Delta x)=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}-f'(a)=\frac{f(a+\Delta x)-(f(a)+\Delta x f'(a))}{\Delta x}\to 0 \text{ då } \Delta x\to 0$$

$\rho(\Delta x)$ är det "relativa felet" (funktion minus tangent per längdenhet).

Definition: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ kallas **differentierbar i (a,b)** om f är partiellt deriverbar i (a,b) **och**

$$\rho(\Delta x,\Delta y)=\frac{f(a+\Delta x,b+\Delta y)-(f(a,b)+f'_x(a,b)\Delta x+f'_y(a,b)\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\to 0 \text{ då } (\Delta x,\Delta y)\to(0,0).$$

|||.

Vi skriver upp det så här: med $\Delta x=x-a$, $\Delta y=y-b$:

Definition: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ kallas **differentierbar i (a,b)** om f är partiellt deriverbar i (a,b) **och**

$$f(x,y)-f(a,b)=f'_x(a,b)\,(x-a)+f'_y(a,b)\,(y-b)+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\;\rho(x-a,y-b)$$

där $\rho(x-a,y-b)\to 0$ då $(x,y)\to(a,b)$, dvs f approximeras i (a,b) av "linjära avbildningen" så bra att det *relativa* felet går mot noll då $(x,y)\to(a,b)$.

|||.

[helt analogt för $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$]

Definition: Om $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ är differentierbar i (a,b) så kallas

$$z=f(a,b)+f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)$$

för **tangentplan till ytan $z=f(x,y)$** i punkten $(a,b,f(a,b))$.

|||.

Exempel: Ange en ekvation för tangentplanet till paraboloiden $z=x^2+y^2$ i punkten (1, 1, 2) <fig2>

$$f'_x=2x \text{ och } f'_y=2y\Longrightarrow f'_x(1,1)=2=f'_y(1,1)$$

och därmed planet $z=2+2(x-1)+2(y-1)$ eller $2x+2y-z=2$.

$\|$.

En viktig klass av differentierbara funktioner är $\mathcal{C}^1$-funktionerna:

SATS: $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Om alla partiella derivator f'_{x_k} är kontinuerliga (i $\boldsymbol{a}$) så är f differentierbar i $\boldsymbol{a}$.

Bevis. (typisk tentauppgift). Bevisas på onsdag. $\square$

Gränsvärdesreglerna ger:

SATS: Om f, g är differentierbara, $c \in \mathbb{R}$, så är även $c\,f + g$, $f \cdot g$ och $\frac{f}{g}$ (då $g \neq 0$) differentierbara.

Viktigaste regeln: "derivatan av sammansatta funktioner":

$$(f(g(t)))' = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

$$(f(x(t), y(t)))' = f'_x \cdot x' + f'_y \cdot y'$$

SATS: (KEDJEREGELN)

Förutsättningar:

- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är differentierbar i (a, b)
- $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ är deriverbar i $]\alpha, \beta[$ med $V_g \subseteq D_f$

Påstående: Då är $h(t) = f \circ g\,(t) = f(x(t), y(t))$ deriverbar i $]\alpha, \beta[$ med

$$h'(t) = f'_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f'_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

Bevis. (typisk tentauppgift). Att visa:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} = h'(t) = f'_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f'_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

Räkning: För att spara plats om man inte har en hel tavla man kan fylla, utan måste begränsa sig till vad som får plats på papper: vi sätter $\boldsymbol{k}(t) = (x(t + \Delta t) - x(t), y(t + \Delta t) - y(t))$:

$$\frac{1}{\Delta t}(h(t + \Delta t) - h(t)) = \frac{1}{\Delta t}[f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - f(x(t), y(t))] = [\text{differentierbar}] =$$

$$= \frac{f'_x(x(t), y(t))\,(x(t + \Delta t) - x(t)) + f'_y(x(t), y(t))(y(t + \Delta t) - y(t)) + |\boldsymbol{k}|\,\rho(\boldsymbol{k})}{\Delta t} =$$

$$= \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} f'_x(x(t), y(t)) + \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} f'_y(x(t), y(t)) + \frac{|\boldsymbol{k}|}{\Delta t}\,\rho(\boldsymbol{k})$$

Då $\Delta t \to 0$ går detta mot $f'_x(x(t),\ y(t))\ x'(t)\ +\ f'_y(x(t),\ y(t))\ y'(t)$ (vilket skulle bevisas), eftersom: $\Delta t \to 0 \Longrightarrow \boldsymbol{k} \to (0, 0) \Longrightarrow \rho(\boldsymbol{k}) \to 0$ och

$$\frac{|\boldsymbol{k}|}{|\Delta t|} = \sqrt{\frac{(x(t + \Delta t) - x(t))^2 + (y(t + \Delta t) - y(t))^2}{\Delta t^2}} \to \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \text{ då } \Delta t \to 0$$

Detta är ett begränsat tal, vilket ger oss att $\frac{|\boldsymbol{k}|}{\Delta t}\rho(\boldsymbol{k}) \to 0$ då $\Delta t \to 0$. $\square$

Då har vi kedjeregeln för "fält": använd regeln för varje koordinatfunktion.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (u, v) \mapsto (x, y)$$

f, g är differentierbara: $(V_{\boldsymbol{g}} \subseteq D_f)$

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

Då är $h(u, v) = (f \circ \boldsymbol{g})(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ differentierbara med

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$